Lógica Matemática

Prof.ª Grazielle Jenske

UNIASSELVI
2015
1ª Edição

Elaboração:

Prof.ª Grazielle Jenske

Revisão, Diagramação e Produção:

Centro Universitário Leonardo da Vinci – UNIASSELVI

Ficha catalográfica elaborada na fonte pela Biblioteca Dante Alighieri

UNIASSELVI – Indaial.

160

J511 Grazielle Jenske

Lógica matemática/ Grazielle Jenske. Indaial : UNIASSELVI, 2015.

178 p. : il.

ISBN 978-85-7830-888-9

1. Lógica.

I. Centro Universitário Leonardo Da Vinci.

Impresso por:

Apresentação

É LÓGICO!

Quantas vezes você, acadêmico, já utilizou esta expressão? No cotidiano, empregamos argumentos com os mais variados conteúdos – político, religioso, futebolístico, filosófico etc. -, com o objetivo de convencer ou persuadir o interlocutor de que estamos certo em nossos argumentos. E muito frequentemente, em meio à conversa, afirmamos: É LÓGICO!

Geralmente, utilizamos esta expressão quando nos referimos a algo que nos parece evidente. Por exemplo: "É lógico que o time X irá ganhar o campeonato brasileiro!".

Depois de uma frase deste tipo, invariavelmente, surge uma série de razões para fundamentar a conclusão enunciada. "É lógico que o time X irá ganhar o campeonato brasileiro, pois ele possui os melhores jogadores!". Ou ainda: "É lógico que o time X irá ganhar o campeonato brasileiro, pois se mostrou melhor preparado nos jogos iniciais". Este encadeamento de razões denominamos de argumento.

Assim, a lógica pode ser entendida como sendo a ciência das leis do raciocínio (COPI, 1977). Ela está presente no cotidiano de forma geral e não somente no contexto da matemática, pois trata-se da ciência que estuda os princípios e os métodos que permitem estabelecer as condições de validade e não validade dos argumentos.

Um **argumento** é uma parte do discurso, no qual localizamos uma ou mais sentenças denominadas **premissas** e uma sentença denominada **conclusão**. Estes conceitos serão melhores explanados na Unidade 1.

A conclusão deve sempre ser coerente com as informações contidas nas premissas. É primordial estar atento para que os conhecimentos adquiridos ao longo dos anos não influenciem seu julgamento. Mesmo que você, acadêmico, imagine que seja falsa a conclusão, ela deve estar relacionada ao que for mencionado nas premissas e não ao seu conhecimento pré-existente.

Prezado acadêmico, seja bem-vindo à disciplina de Lógica Matemática! Vamos juntos desvendar alguns mistérios desta importante área da matemática.

Bons estudos!

Prof.ª Grazielle Jenske

NOTA

Você já me conhece das outras disciplinas? Não? É calouro? Enfim, tanto para você que está chegando agora à UNIASSELVI quanto para você que já é veterano, há novidades em nosso material.

Na Educação a Distância, o livro impresso, entregue a todos os acadêmicos desde 2005, é o material base da disciplina. A partir de 2017, nossos livros estão de visual novo, com um formato mais prático, que cabe na bolsa e facilita a leitura.

O conteúdo continua na íntegra, mas a estrutura interna foi aperfeiçoada com nova diagramação no texto, aproveitando ao máximo o espaço da página, o que também contribui para diminuir a extração de árvores para produção de folhas de papel, por exemplo.

Assim, a UNIASSELVI, preocupando-se com o impacto de nossas ações sobre o ambiente, apresenta também este livro no formato digital. Assim, você, acadêmico, tem a possibilidade de estudá-lo com versatilidade nas telas do celular, tablet ou computador.

Eu mesmo, UNI, ganhei um novo layout, você me verá frequentemente e surgirei para apresentar dicas de vídeos e outras fontes de conhecimento que complementam o assunto em questão.

Todos esses ajustes foram pensados a partir de relatos que recebemos nas pesquisas institucionais sobre os materiais impressos, para que você, nossa maior prioridade, possa continuar seus estudos com um material de qualidade.

Aproveito o momento para convidá-lo para um bate-papo sobre o Exame Nacional de Desempenho de Estudantes – ENADE.

Bons estudos!

UNI

Olá acadêmico! Para melhorar a qualidade dos materiais ofertados a você e dinamizar ainda mais os seus estudos, a Uniasselvi disponibiliza materiais que possuem o código *QR Code*, que é um código que permite que você acesse um conteúdo interativo relacionado ao tema que você está estudando. Para utilizar essa ferramenta, acesse as lojas de aplicativos e baixe um leitor de *QR Code*. Depois, é só aproveitar mais essa facilidade para aprimorar seus estudos!

BATE PAPO SOBRE O ENADE!

Olá, acadêmico!

Você já ouviu falar sobre o **ENADE**?

Se ainda não ouviu falar nada sobre o ENADE, agora você receberá algumas informações sobre o tema.

Ouviu falar? Ótimo, este informativo reforçará o que você já sabe e poderá lhe trazer novidades.

Vamos lá!

Qual é o significado da expressão ENADE?

EXAME NACIONAL DE DESEMPENHO DOS ESTUDANTES

Em algum momento de sua vida acadêmica você precisará fazer a prova ENADE.

Que prova é essa?

É **obrigatória**, organizada pelo INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Quem determina que esta prova é obrigatória... O **MEC – Ministério da Educação**.

O objetivo do MEC com esta prova é o de avaliar seu desempenho acadêmico assim como a qualidade do seu curso.

Fique atento! Quem não participa da prova fica impedido de se formar e não pode retirar o diploma de conclusão do curso até regularizar sua situação junto ao MEC.

Não se preocupe porque a partir de hoje nós estaremos auxiliando você nesta caminhada.

Você receberá outros informativos como este, complementando as orientações e esclarecendo suas dúvidas.

Você tem uma trilha de aprendizagem do ENADE, receberá e-mails, SMS, seu tutor e os profissionais do polo também estarão orientados.

Participará de webconferências entre outras tantas atividades para que esteja preparado para #mandar bem na prova ENADE.

Nós aqui no NEAD e também a equipe no polo estamos com você para vencermos este desafio.

Conte sempre com a gente, para juntos mandarmos bem no ENADE!

UNIASSELVI

SUMÁRIO

UNIDADE 1

CONHECENDO A LÓGICA MATEMÁTICA

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

A partir desta unidade você será capaz de:

- reconhecer os diversos tipos de linguagem lógica;
- compreender e aplicar os conceitos e símbolos da lógica matemática;
- identificar e diferenciar argumentos, premissas e conclusão;
- compreender e aplicar as regras de inferências em provas de argumentos;
- perceber as regras derivadas, teoremas e implicações como facilitadores para as provas de argumentos.

PLANO DE ESTUDOS

Nesta unidade de ensino, a abordagem da Lógica Matemática está dividida em quatro tópicos, nos quais se apresentam desde os conceitos introdutórios da lógica matemática até formalização e validade de argumentos. Cada tópico oferecerá subsídios que o auxiliarão na interiorização dos conteúdos e na resolução das autoatividades solicitadas.

TÓPICO 1 – CONCEITOS E SIMBOLOGIA

TÓPICO 2 – CLASSIFICAÇÃO DOS CONECTIVOS E FORMALIZAÇÃO

TÓPICO 3 – FORMAS VÁLIDAS E INVÁLIDAS DE ARGUMENTOS

TÓPICO 4 – REGRAS DERIVADAS, TEOREMAS E IMPLICAÇÕES

TÓPICO 1

CONCEITOS E SIMBOLOGIA

1 INTRODUÇÃO

Você já deve ter observado, ao longo do curso, que a forma de estruturar o pensamento matemático é diferente do que o feito em outras áreas, ou mesmo no dia a dia. A maneira como escrevemos as afirmações matemáticas (lemas, teoremas, preposições, corolários) sempre parte de algumas hipóteses, e tudo o que está dito depois delas precisa ser provado. Esta estrutura vem da lógica matemática!

A lógica matemática não se refere a nenhum ser, a nenhuma coisa, ou a algum objeto em particular, nem a um conteúdo, mas à forma e à correção do pensamento, isto é, ela nos ensina a usar corretamente o raciocínio, o que irá auxiliá-lo tanto na preparação e organização do plano da disciplina em sua futura prática docente como em seu cotidiano, permitindo-o ser claro e objetivo. Desta forma, pensar com lógica significa ordenar o pensamento.

Podemos definir a lógica como sendo o estudo dos argumentos e, neste tópico, daremos início aos conceitos próprios da lógica matemática, bem como sua simbologia.

2 ARGUMENTO

Na introdução deste caderno, vimos que lógica é o estudo de argumentos. Argumento vem do vocábulo latim e deriva da palavra *argumentum* que significa prova ou razão. Trata-se de uma sequência de enunciados, ou proposições, na qual um enunciado é a conclusão e os demais são premissas, as quais servem para provar a conclusão, ou seja, trata-se do raciocínio que utilizamos para demonstrar ou comprovar uma proposição, ou ainda, para convencer outra pessoa daquilo que se afirma ou se nega.

Vejamos exemplos de argumentos:

Argumento 1: Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal.

Premissa: Todos os homens são mortais.
Premissa: Sócrates é um homem.
Conclusão: Sócrates é mortal.

Embora seja comum que se coloque a conclusão como o último enunciado, dentro de um argumento isso não é obrigatório, como podemos ver no próximo argumento.

Argumento 2: Ela é de áries, pois nasceu na primeira semana de abril.

Premissa: Ela nasceu na primeira semana de abril.
Conclusão: Ela é de áries.

Estes são dois argumentos simples. Num argumento complexo existem conclusões que são usadas como uma premissa para inferir uma conclusão adicional, e este encadeamento pode prosseguir. Vejamos um exemplo de argumento complexo.

Argumento 3: Todos os números racionais podem ser expressos como quociente de dois inteiros. Contudo, π não pode ser expresso como quociente de dois inteiros. Portanto, π não é um número racional. Evidentemente, π é um número. Logo, existe pelo menos um número não racional.

Premissa: Todos os números racionais podem ser expressos como quociente de dois inteiros.
Premissa: π não pode ser expresso como quociente de dois inteiros.
Conclusão intermediária das premissas: π não é um número racional.
Premissa: π é um número.
Conclusão: Existe pelo menos um número não racional.

Os argumentos complexos são formados por etapas. O argumento complexo acima consiste em duas etapas. Os três primeiros enunciados formam a primeira etapa e os três últimos formam a segunda etapa. O terceiro enunciado é componente das duas etapas, funcionando como a conclusão da primeira e como uma premissa da segunda.

AUTOATIVIDADE

Identifique as premissas e a conclusão nos argumentos:

1 Quem nasce no Brasil é brasileiro. Maria nasceu no Brasil. Logo, Maria é brasileira.

2 Quem estuda passa de ano. Pedro é estudioso. Logo, Pedro passará de ano.

3 João é professor ou advogado. João não é advogado. Então, João é professor.

4 Hoje é sábado ou domingo. Hoje não é sábado. Logo, hoje é domingo.

5 Quem é humilde e bondoso merece um lugar no céu. Isabel é humilde e bondosa. Então, Isabel merece um lugar no céu.

É possível identificar as premissas e a conclusão, através de indicadores de inferência. Indicadores de inferência são palavras ou frases utilizadas no argumento. Existem os indicadores de premissas e os indicadores de conclusão. A seguir, listamos alguns exemplos de indicadores:

Indicadores de Premissa	Indicadores de Conclusão
Pois	Portanto
Desde que	Por conseguinte
Como	Assim
Porque	Dessa maneira
Assumindo que	Neste caso
Visto que	Podemos deduzir que
Admitindo que	Logo
Isto é verdade porque	De modo que
A razão é que	Então
Em vista de	Consequentemente
Como consequência de	Assim sendo
Como mostrado pelo fato de	Segue-se que
Dado que	O qual implica que
Sabendo-se que	O qual acarreta que
Supondo que	O qual prova que
Como foi dito	O qual inferimos que
Devido a	Resulta em

Os indicadores de premissa e conclusão são os principais indícios para se identificar argumentos e para analisar sua estrutura. Estes são alguns exemplos de indicadores de inferência, existem outros, não relacionados aqui.

Argumento 4: Todos os catarinenses são brasileiros. Isadora é catarinense. Portanto, Isadora é brasileira.

Premissa: Todos os catarinenses são brasileiros.
Premissa: Isadora é catarinense.
Inferência de conclusão: Portanto.
Conclusão: Isadora é brasileira.

Argumento 5: Devido ao excesso de chuva, houve alagamentos na cidade.

Inferência de premissa: Devido ao.
Premissa: Excesso de chuva.
Conclusão: Houve alagamentos na cidade.

Um argumento pode ter uma ou mais premissas, mas só pode ter uma única conclusão.

3 PROPOSIÇÕES

Conforme vimos anteriormente, argumento é um conjunto de proposições. Assim, as premissas e a conclusão de um argumento são proposições. Proposições ou enunciados são significados ou ideias expressáveis por sentenças declarativas, onde afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinada coisa.

As sentenças declarativas são foco de nosso estudo, pois a elas podemos atribuir a propriedade de ser "verdadeira" ou "falsa". Vejamos alguns exemplos de proposições:

Proposição	Valor lógico
A lua é um satélite natural da Terra.	Verdadeiro
½ é um número natural.	Falso
São Paulo é a capital do Brasil.	Falso
Janeiro é o primeiro mês do ano.	Verdadeiro

IMPORTANTE

Na Língua Portuguesa, temos vários tipos de sentenças: imperativas, exclamativas, interrogativas e declarativas. Porém, apenas as declarativas exprimem proposições, pois podemos atribuir um valor verdadeiro ou falso.

Os enunciados a seguir não são preposições, pois não é possível atribuir um valor de verdade (verdadeiro/falso).

Enunciados	
Traga o livro.	Sentença imperativa
Você gosta de estudar?	Sentença interrogativa
Que lindo!	Sentença exclamativa

AUTOATIVIDADE

Verifique quais destes enunciados exprimem uma proposição:

1 Hoje o dia está chuvoso.

2 Que horas são?

3 Seja forte!

4 Florianópolis é a capital de Santa Catarina.

5 Quem estuda é um vencedor.

O Cálculo Proposicional, nosso objeto de estudos na primeira e segunda unidades deste caderno, analisa a relação entre as proposições, considerando a forma que essa relação assume e não especificamente o seu conteúdo ou o seu significado.

As proposições podem ser substituídas por letras maiúsculas do alfabeto latino: A, B, C, ..., Z. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Se realizar as autoatividades com êxito, então terei bom desempenho na disciplina.

Se tomarmos:
A = Se realizar as autoatividades com êxito.
B = Terei bom desempenho na disciplina.

Teremos: ***Se A então B,*** a tradução simbólica da proposição.

Exemplo 2: Esta é a melhor turma e vocês são os melhores alunos.

Se tomarmos:
R = Esta é a melhor turma.
S = Vocês são os melhores alunos.

Teremos: ***R e S,*** a tradução simbólica da proposição.

Uma proposição pode ser ***simples*** ou ***composta***. Uma proposição é dita ***simples*** se, e somente se, contiver uma única afirmação. São exemplos de proposição simples:

M = Maria é estudiosa.
N = Eduardo joga futebol.
P = O número 5 é primo.
Q = Todo número par é divisível por 2.

Uma proposição é dita ***composta*** quando for constituída por pelo menos duas proposições simples, relacionadas entre si pelo que chamamos de conectivos. São exemplos de proposição composta:

T = Está frio ***e*** choveu hoje.
U = Ele é alto ***ou*** baixo.
V = ***Se*** Ana chegou atrasada, ***então*** ela perdeu o ônibus.
Z = João irá sair hoje ***se, e somente se***, terminar todo o trabalho.

Em nosso estudo, inicialmente nos restringiremos ao chamado cálculo proposicional, por esta razão, os conectivos utilizados (e; ou; se... então...; se, e somente se; não) são conhecidos por sentenciais ou proposicionais e serão aprofundados no Tópico 2 desta unidade.

4 LÓGICA FORMAL

A lógica está dividida em formal e informal. A lógica informal é o estudo de argumentos particulares em linguagem natural e do contexto no qual elas ocorrem. Ela se concentra na análise prática dos argumentos.

A lógica formal é o estudo das formas de argumento, onde utiliza modelos abstratos comuns a argumentos distintos, mas que apresentam a mesma estrutura. Este é o foco dos nossos estudos nesta disciplina.

A lógica matemática na sua versão formal ou clássica assume como regras fundamentais do pensamento válido três princípios básicos. São eles:

Princípio da Identidade: Toda proposição é idêntica a si mesma. Simbolicamente, P é P.

Princípio da Não Contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Simbolicamente, não (P e não P).

Princípio do Terceiro Excluído: Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir. Simbolicamente, P ou não P (ou exclusivo).

O Princípio da Identidade garante que P deve ser igual a P e não pode ser A, ou B. Na prática é dizer que um cachorro é um cachorro e não pode ser um pássaro. Este princípio nos garante que tudo tem uma identidade e não podemos pensar nada sem sua identidade. Tudo que existe na natureza só pode ser representado e percebido pelo pensamento com sua identidade.

O Princípio da Não Contradição garante que o que é, é e não pode ser sua negação. Um exemplo disso é que um cachorro é um cachorro e não pode ser um não cachorro. Ou seja, ou é um cachorro ou não é. Note que sem este princípio não há o princípio de identidade.

E o Princípio do Terceiro Excluído garante que toda afirmação é verdadeira ou é falsa, não existe uma terceira possibilidade. "Ou o aluno é estudioso ou o aluno não é estudioso"; "Ou este relógio funciona ou não funciona".

Acadêmico, para que seja possível uma análise lógica é necessário que sejam satisfeitos os três princípios da lógica formal.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico, você viu que:

- **Argumento** é uma sequência de enunciados, ou proposições, na qual um enunciado é a conclusão e os demais são premissas.

- **Premissas** e **conclusão** são partes de um argumento.

- **Proposição** é qualquer sentença declarativa à qual podemos atribuir a propriedade de ser verdadeira ou falsa. Uma proposição pode ser simples ou composta. Ela é dita simples se, e somente se, contiver uma única afirmação. E uma proposição é dita composta quando for constituída por pelo menos duas proposições simples, relacionadas entre si pelo que chamamos de conectivos.

- Os **conectivos proposicionais** são: e; ou; se... então...; se, e somente se; não. Eles são utilizados para ligar duas proposições.

- **Indicadores de inferência** são palavras ou frases utilizadas no argumento. Existem os indicadores de premissas (pois, desde que, supondo que, ...) e os indicadores de conclusão (portanto, logo, então, ...).

- Princípios básicos da lógica formal:
  - **Princípio da Identidade:** Toda proposição é idêntica a si mesma. Simbolicamente, P é P.
  - **Princípio da Não Contradição:** Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo. Simbolicamente, não (P e não P).
  - **Princípio do Terceiro Excluído:** Toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existindo um terceiro valor que ela possa assumir. Simbolicamente, P ou não P (ou exclusivo).

AUTOATIVIDADE

Acadêmico, um dos princípios da Uniasselvi é: “Não basta saber, é preciso saber fazer”. Agora chegou a sua vez de colocar em prática os conceitos iniciais da Lógica.

1 Alguns dos enunciados seguintes são argumentos. Identifique as suas premissas e a sua conclusão.

a) Eu não quero fazer a tarefa, mamãe. O desenho animado ainda não acabou.
b) Em um bairro distante da cidade, a casa estava em ruínas. A fuga das baratas ressoava pela varanda.
c) As pessoas talentosas como você deveriam receber uma educação superior. Vá para a faculdade!
d) O triângulo ABC é equilátero. Portanto, cada um de seus ângulos internos mede 60 graus.
e) O dia está lindo hoje. Você precisa mesmo trabalhar?

2 Nos argumentos a seguir, circule todos os indicadores de inferência.

a) Você terá sucesso, desde que estude e trabalhe arduamente.
b) Ele prometeu contratá-la. Portanto, se ele faltar ao compromisso, ele estará definitivamente errado.
c) Se amanhã tiver sol, então iremos ao parque.
d) Ele não está em casa. Logo, foi passear.
e) Você pode usar o carro, sabendo que terás que abastecer.

3 Tomando as proposições simples relacionadas a seguir, forme proposições compostas usando os conectivos “e”, “ou”, “se... então”, “se e somente se”, podendo usar um ou mais conectivos em cada proposição.

A = Está frio.
B = A temperatura subiu.
C = Choveu.
D = Faz sol hoje.

TÓPICO 2

CLASSIFICAÇÃO DOS CONECTIVOS E FORMALIZAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, vimos que os conectivos proposicionais (e; ou; se... então...; se, e somente se; não) são utilizados para unir duas ou mais proposições simples, formando assim uma proposição composta.

Apresentaremos a seguir os conectivos que, com suas representações simbólicas, serão usados na tradução de proposições para a linguagem simbólica.

2 CONJUNÇÃO

É o resultado da combinação de duas proposições ligadas pelo conectivo **e**, simbolicamente representado por $\wedge$ ou &. A conjunção também pode ser expressa pelas palavras: mas, contudo, embora, visto que, entre outras.

Exemplo 1: Ana gosta de Matemática e Maria gosta de Artes.
A = Ana gosta de Matemática.
M = Maria gosta de Artes.
Simbolicamente: $A \wedge M$.

Exemplo 2: Luís foi ao cinema, contudo sua namorada Carla foi ao teatro.
L = Luís foi ao cinema.
C = Carla foi ao teatro.
Simbolicamente: L & C.

Exemplo 3: João é professor e Rafael é dentista.
J = João é professor.
R = Rafael é dentista.
Simbolicamente: $J \wedge R$.

3 DISJUNÇÃO

É o resultado da combinação de duas proposições ligadas pelo conectivo **ou**, simbolicamente representado por $\vee$. Na linguagem coloquial, a palavra ou pode ser empregada em dois sentidos, inclusivo ou exclusivo, representados simbolicamente por $\vee$ e $\underline{\vee}$, respectivamente.

Observe as seguintes proposições:

A = Ana é alta ou bonita.
B = Bruna é de áries ou de peixes.

Na proposição A, pode ocorrer que Ana seja alta e bonita, neste caso, trata-se do **ou inclusivo**, isto é, pode ocorrer se as duas proposições sejam verdadeiras. Já na proposição B, Bruna não pode ser de áries e de peixes ao mesmo tempo. Ou Bruna é de áries ou ela é de peixes. Trata-se do **ou exclusivo**, ou a primeira proposição é verdadeira ou a segunda é verdadeira.

Exemplo 1: Ana gosta de Matemática ou de Artes.

A = Ana gosta de Matemática.
M = Ana gosta de Artes.

Simbolicamente: $A \vee M$ (ou inclusivo).

Exemplo 2: Luís foi ao cinema ou foi ao teatro.

L = Luís foi ao cinema.
C = Luís foi ao teatro.

Simbolicamente: $L \vee C$ (ou inclusivo).

Exemplo 3: João é alto ou baixo.

J = João é alto.
R = João é baixo

Simbolicamente: $J \veebar R$ (ou exclusivo).

Exemplo 4: Beatriz é catarinense ou paulista.

C = Beatriz é catarinense.
P = Beatriz é paulista.

Simbolicamente: $C \veebar P$ (ou exclusivo).

IMPORTANTE

Quando a disjunção $\vee$ é empregada no sentido inclusivo, $P \vee Q$, o argumento é válido se:

(i) apenas P for verdadeiro.
(ii) apenas Q for verdadeiro.
(iii) P e Q forem ambos verdadeiros.

Isto é importante para diferenciar da disjunção exclusiva, $P \vee Q$, onde pode ocorrer apenas a situação (i) apenas P for verdadeiro ou a situação (ii) apenas Q for verdadeiro, mas não pode ocorrer a situação (iii). A disjunção exclusiva ocorre na forma "Ou ... ou", por exemplo "ou é dia ou é noite".

ATENÇÃO

No Cálculo Proposicional, somente o *ou inclusivo* será abordado.

4 CONDICIONAL

Duas proposições formam uma condicional quando forem colocadas no seguinte modelo:

Se (proposição 1), **então** (proposição 2).

O símbolo utilizado para ligar as duas proposições de uma condicional é $\rightarrow$.

IMPORTANTE

As proposições interligadas pelo condicional recebem o nome de *antecedente* e *consequente*, na forma "se antecedente, então consequente", ou simbolicamente: antecedente $\rightarrow$ consequente.

Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Se o número é par, então ele é divisível por dois.

Note que a consequente depende da definição da palavra "par".

P = O número é par.
Q = (O número) é divisível por dois.

Simbolicamente: $P \rightarrow Q$.

Exemplo 2: Se colocarmos magnésio em uma solução de ácido clorídrico, então haverá uma reação de oxirredução.

Neste exemplo, a consequente decorre da reação química da antecedente.

M = Colocarmos magnésio em uma solução de ácido clorídrico.
R = Reação de oxirredução.

Simbolicamente: $M \rightarrow R$.

Exemplo 3: Se Gabriel é inteligente, então sou um gênio.

Neste argumento, não existe uma relação real entre a antecedente e a consequente. O que identifica se alguém é um gênio são testes de aptidões mentais, como por exemplo, o teste de Q.I.

G = Gabriel é inteligente.
E = Eu sou um gênio.

Simbolicamente: $G \rightarrow E$.

Exemplo 4: Se amanhã for calor, então irei à praia.

A consequente reflete uma vontade própria, que depende da antecedente.

C = Amanhã for calor.
P = Irei à praia.

Simbolicamente: $C \rightarrow P$.

Exemplo 5: Se todos os homens são mortais e Sócrates é um homem, então Sócrates é mortal.

Neste exemplo, a consequente depende logicamente da antecedente.

H = Todos os homens são mortais.
S = Sócrates é um homem.
M = Sócrates é mortal.

Simbolicamente: $(H \vee S) \rightarrow M$.

Dentre estes exemplos, apenas o exemplo 5 tem relevância para o cálculo proposicional, pois o valor verdadeiro ou falso da consequente depende apenas do valor verdadeiro ou falso atribuído à sua antecedente.

5 BICONDICIONAL

Utilizamos o conectivo bicondicional em toda proposição composta, formada por duas proposições, que pode ser colocada na forma:

(proposição 1) se, e somente se, (proposição 2)

O símbolo que representa o conectivo bicondicional é $\leftrightarrow$.

Acadêmico! Note que a proposição bicondicional pode ser entendida como uma conjunção de dois condicionais, ou seja, dado $A \leftrightarrow B$, temos $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Somente terás boas notas, se, e somente se, estudares.

Poderíamos escrever duas condicionais: (i) Se tenho boas notas, então estudo. (ii) Se estudo, então tenho boas notas.

B = Terás boas notas.
E = Se estudares.

Simbolicamente: $B \leftrightarrow E$.

Exemplo 2: Amo, se e somente se, vivo.

Novamente, verificamos a existências de duas condicionais: (i) Se amo, então estou vivo. (ii) Se estou vivo, então amo.

A = Amo.
V = Vivo.

Simbolicamente: A $\leftrightarrow$ V.

Exemplo 3: Irei buscá-lo, se e somente se, chover.

Condicionais implícitas: (i) Se chover, então vou buscá-lo. (ii) Se buscá-lo, então choveu.

B = Irei buscá-lo.
C = Se chover.

Simbolicamente: B $\leftrightarrow$ C.

Exemplo 4: Um número é dito par, se e somente se, for divisível por dois.

Condicionais implícitas: (i) Se um número é dito par, então é divisível por dois. (ii) Se o número é divisível por dois, então ele é par.

P = Um número par.
D = Divisível por dois.

Simbolicamente: P $\leftrightarrow$ D.

6 NEGAÇÃO

Este conectivo nega a afirmação da proposição que o precede. Este é um conectivo unário, pois diferente dos conectivos binários, ele não liga duas proposições. O símbolo utilizado para esse conectivo é **~**, ele é colocado antes da letra que representa a proposição.

Se o valor verdadeiro ou falso de uma proposição é (V), quando acompanhado do conectivo de negação, passará a ser (F) e vice-versa.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Fernanda não gosta de cachorros.

F = Fernanda gosta de cachorros.

Simbolicamente: ~ F.

Exemplo 2: Paulo não recebeu sua encomenda na data prevista.

P = Paulo recebeu sua encomenda na data prevista.

Simbolicamente: ~ P.

Exemplo 3: O clima seco não gera umidade.

S = O clima seco gera umidade.

Simbolicamente: ~ S.

Exemplo 4: O rato não gosta do gato.

G = O rato gosta do gato.

Simbolicamente: ~ G.

Acadêmico, você notou que cada conectivo é representado por um símbolo especial. Porém, dependendo do autor, podem ocorrer mudanças no uso de símbolos para os conectivos.

7 FORMALIZAÇÃO

O processo de formalização consiste em converter uma sentença ou argumento em particular em uma forma sentencial composta de letras proposicionais, conectivos lógicos e parênteses. Os conjuntos de símbolos utilizados nestas estruturas são:

- **Letras proposicionais** são letras maiúsculas do alfabeto, como: A, B, C, D, E, ..., Z.
- **Conectivos proposicionais:** $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- **Parênteses:** ( ).

Os conjuntos de símbolos utilizados nestas estruturas constituem o vocabulário do Cálculo Proposicional.

Vejamos alguns exemplos de formalização:

Exemplo 1: Dois é um número par.

P = Dois é um número par.

Simbolicamente: P.

Exemplo 2: Três não é um número par.

P = Três é um número par.

Simbolicamente: $\sim$ P.

Exemplo 3: Dois é um número par e é um número primo.

P: Dois é um número par.
Q: Dois é um número primo.

Simbolicamente: $P \wedge Q$.

Exemplo 4: Três não é um número par, mas é um número primo.

P: Três é um número par.
Q: Três é um número primo.

Simbolicamente: $\sim P \wedge Q$.

Os símbolos da lógica formal expõem com maior clareza as estruturas lógicas de proposições e argumentos, que muitas vezes ficam obscuros na linguagem comum.

8 REGRAS DE FORMAÇÃO

Qualquer sequência composta por elementos do vocabulário do cálculo proposicional constitui uma fórmula. Porém, nem toda fórmula é aceita pelo cálculo proposicional. Para ser aceita, ela precisa ser uma **fórmula bem formada**, conhecida como fbf.

Para se obter fbfs é preciso que a sequência formada siga as seguintes regras de formação:

1. Qualquer letra proposicional isolada é uma fbf.

2. Se φ é uma fbf, então $\sim \varphi$ também é uma fbf.

3. Se φ e δ são fbfs, então $(\varphi \wedge \delta)$, $(\varphi \vee \delta)$, $(\varphi \rightarrow \delta)$ e $(\varphi \leftrightarrow \varphi)$ também são fbfs.

Duas destas regras empregam letras gregas. Note que as letras gregas não são elementos do vocabulário e, portanto, não devem ser empregadas ao se escrever uma fbf. Cada letra grega serve apenas, na regra, para representar uma fbf qualquer. As letras utilizadas são o delta (δ), phi (φ) e o psi (Ψ).

Nos exemplos a seguir, vamos verificar se as fórmulas são ou não bem formadas, justificando sua construção.

Exemplo 1: P é uma fbf, pois:

Construção	Justificativa
P	regra 1

Exemplo 2: $(P \wedge Q)$ é uma fbf, pois:

Construção	Justificativa
P	regra 1
Q	regra 1
$(P \wedge Q)$	regra 3

Exemplo 3: $(R \rightarrow \sim (P \wedge Q))$ é uma fbf, pois:

Construção	**Justificativa**
P	regra 1
Q	regra 1
$(P \wedge Q)$	regra 3
$\sim (P \wedge Q)$	regra 2
R	regra 1
$R \rightarrow \sim (P \wedge Q))$	regra 3

Exemplo 4: A fórmula $(R \rightarrow \sim (P \wedge Q)$ não é uma fbf, pois os parênteses não estão balanceados, o que sempre deveria ocorrer pela aplicação da regra 3.

Exemplo 5: $\sim (P)$ não é uma fbf, pois a regra 2 não prevê a introdução de parênteses junto ao conectivo de negação ~.

Exemplo 6: A fórmula $(R \vee P \leftrightarrow Q)$ não é uma fbf, pois falta um nível de parênteses, poderia ser $((R \vee P) \leftrightarrow Q)$ ou ainda $(R \vee (P \leftrightarrow Q))$.

Exemplo 7: A fórmula $(R \vee \leftrightarrow Q)$ não é uma fbf, pois o uso da regra 3 impede dispor os operadores $\vee \leftrightarrow$ lado a lado.

Acadêmico! Quando ocorrer um par de parênteses mais externo, que encerra a fórmula toda, podemos omitir seu uso, pois ele não compromete a compreensão da fórmula. Assim, ao invés de escrevermos $(R \rightarrow \sim (P \wedge Q))$, podemos simplesmente escrever $R \rightarrow \sim (P \wedge Q)$.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico, estudamos:

- A classificação dos conectivos proposicionais, também conhecidos como operadores lógicos. É importante que tenhas sempre à mão este quadro resumo:

Conectivo	**Símbolo**	**Lê-se**
Conjunção	$\wedge$	... e ...
Disjunção	$\vee$	... ou ...
	$\underline{\vee}$	ou ... ou ...
Condicional	$\rightarrow$	se ... então ...
Bicondicional	$\leftrightarrow$	... se e somente se ...
Negação	~	não (é o caso de ...)

- O Vocabulário do Cálculo Proposicional:
- **Letras proposicionais** são letras maiúsculas do alfabeto, como: A, B, C, D, E, ..., Z.
- **Conectivos proposicionais**: ~, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- **Parênteses**: ( ).

- Regras de formação para uma **fórmula bem formada (fbf)**:

1. Qualquer letra proposicional isolada é uma fbf.

2. Se φ é uma fbf, então ~ φ também é uma fbf.

3. Se φ e δ são fbfs, então $(\varphi \wedge \delta)$, $(\varphi \vee \delta)$, $(\varphi \rightarrow \delta)$ e $(\varphi \leftrightarrow \delta)$ também são fbfs.

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico, chegou a hora de você testar seus conhecimentos sobre a linguagem específica da Lógica Matemática. Boa atividade!

1 Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições, utilizando letras maiúsculas para abreviar as proposições simples.

a) Se Carlos viajar para ver Cristiane, ela não poderá visitar seus pais.
b) Ou Carlos viaja para ver Cristiane ou ela irá visitar seus pais.
c) Carlos não viajou para ver Cristiane e ela irá visitar seus pais.
d) Carlos viajará para ver Cristiane se, e somente se, ela for visitar seus pais.
e) Se Carlos viajar para ver Cristiane e Pedro ligar para ela, então Cristiane não poderá visitar seus pais.
f) Se Carlos viajar para ver Cristiane ou Pedro viajar para ver Cristiane, ela não poderá visitar seus pais.

2 Sejam as proposições: A = Carlos é professor e B = Pedro é dentista. Traduza para a linguagem natural as seguintes proposições simbólicas:

a) $A \vee B$
b) $\sim A \wedge B$
c) $A \rightarrow B$
d) $A \rightarrow \sim B$
e) $\sim A \leftrightarrow B$
f) $\sim A \wedge \sim B$

3 Determine se as fórmulas a seguir são fbfs.

a) A
b) $(A \rightarrow B) \wedge C$
c) $B \wedge (C \vee D))$
d) $B \wedge C \vee D$
e) $\sim (A \vee B) \vee C \rightarrow D$
f) $(\sim ((A \vee B) \wedge C \leftrightarrow ((D \vee \sim E) \rightarrow F))$
g) $((\sim (A \vee (\sim B) \leftrightarrow D) \vee E)$

FORMAS VÁLIDAS E INVÁLIDAS DE ARGUMENTOS

1 INTRODUÇÃO

Vimos anteriormente que uma forma de argumento é o argumento formalizado, onde premissas e conclusões são fbfs construídas mediante as regras de formação e o vocabulário do cálculo proposicional.

Qualquer argumento em particular, escrito em alguma linguagem de comunicação humana, como o Português, cuja formalização resulta numa forma de argumento específica, é chamado uma instância desta forma.

Exemplo 1: Um número natural n é par ou é ímpar. O número natural n não é par. Portanto, ele é ímpar.

É uma instância da forma $P \vee Q$, $\sim P \vdash P$.

Uma forma de argumento, como a anterior, é uma forma válida se todas as suas instâncias são válidas. Numa forma de argumento válida é impossível que a conclusão seja falsa enquanto que as premissas sejam verdadeiras.

Uma forma de argumentos é inválida se pelo menos uma de suas instâncias é inválida, ou seja, ocorre que a conclusão é falsa, embora as premissas sejam verdadeiras.

Exemplo 2: Se você está dançando na Lua, então você está vivo. Você está vivo. Portanto, você está dançando na Lua.

A forma $P \rightarrow Q$, $Q \vdash P$ é inválida. Nesta instância as premissas são verdadeiras, porém a conclusão é falsa.

O Cálculo Proposicional fornece um sistema de regras de inferência capaz de gerar todas as formas de argumento válidas expressáveis na linguagem e somente as formas válidas. Regras de inferências são formas válidas de argumento, apresentadas como postulados, utilizadas para derivar uma prova de um argumento válido qualquer numa série de etapas simples e precisas de raciocínio. Cada etapa numa derivação é uma instância de uma das regras.

Neste tópico, estudaremos o processo de derivação, que também podemos chamar de prova do argumento. Para isso, usaremos uma tabela de três colunas, onde as linhas são sequencialmente numeradas na primeira coluna, as premissas e conclusões derivadas pelas regras são apresentadas na coluna do meio e a justificativa da prova ocorre na coluna à direita. Na coluna de justificativa escreve-se:

- P para designar que se trata de uma premissa.
- O nome abreviado da regra quando uma conclusão é derivada pela sua aplicação. As linhas utilizadas como premissas de uma regra aplicada são escritas antes da regra, separadas por vírgulas.

Esse processo de derivação será melhor estudado durante a apresentação das regras de inferência que veremos a seguir. As regras de inferências estão divididas em não hipotéticas e hipotéticas. No total, existem dez regras básicas de inferência: uma de introdução e uma de eliminação para cada um dos cinco operadores lógicos. Vejamos a seguir as oito inferências não hipotéticas.

2 REGRAS NÃO HIPOTÉTICAS DE INFERÊNCIA

Regras de inferência são regras de transformação sintáticas que podem ser usadas para inferir uma conclusão a partir de uma premissa, para criar um argumento, ou seja, elas permitem gerar todas as formas de argumentos válidas no Cálculo Proposicional.

A seguir são apresentadas as regras básicas não hipotéticas de inferência junto a exemplos de argumentos válidos e a sua prova.

Regra 1: ***Modus Ponens*** **(MP) ou Eliminação do Condicional ($\rightarrow$ E)**

De um condicional ($\rightarrow$) e seu antecedente (o que está antes do condicional), podemos inferir o seu consequente (o que está depois do condicional).

Simbolicamente: $\varphi \rightarrow \Psi, \varphi \vdash \Psi$.

Na formalização da Lógica Matemática, a vírgula separa as premissas e o símbolo $\vdash$ significa "implica", isto é, indica a conclusão do argumento.

Exemplo 1: Laura é estudiosa. Se Laura é estudiosa, então ela tira boas notas. Laura tira boas notas.

A: Laura é estudiosa.
B: Laura tira boas notas.

Formalização: $A, A \rightarrow B \vdash B$.

Prova do argumento:

Linha	Proposição	Justificativa
1	A	P (premissa)
2	$A \rightarrow B$	P (premissa)
3	B	1, 2 MP (*modus ponens*)

Exemplo 2: $C, S \rightarrow A, C \rightarrow S \vdash A$

Prova do argumento:

Linha	Proposição	Justificativa
1	C	P (premissa)
2	$S \rightarrow A$	P (premissa)
3	$C \rightarrow S$	P (premissa)
4	S	1, 3 MP (*modus ponens*)
5	A	2, 4 MP (*modus ponens*)

De agora em diante, vamos omitir a justificativa por extenso para simplificar a prova. Desta forma, utilizaremos apenas a abreviação P para premissa, MP para *modus ponens* e outras abreviações que veremos adiante.

Exemplo 3: $\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R), \sim P, Q \vdash R$

Prova do argumento:

Linha	Proposição	Justificativa
1	$\sim P \rightarrow (Q \rightarrow R)$,	P
2	$\sim P$	P
3	Q	P
4	$Q \rightarrow R$	1, 2 MP
5	R	3, 4 MP

Regra 2: Eliminação da Negação (~ E)

De uma fbf ~~φ, podemos inferir φ (isto é, duas negações consecutivas se cancelam).
Simbolicamente: ~~ $\varphi \vdash \varphi$.

Exemplo 1: Não é verdade que a Grace não sabe correr. Portanto, ela sabe correr.

C: Grace sabe correr.

Formalização: ~~ C $\vdash$ C.

Prova do argumento:

1	~~C	P
2	C	1~E

Exemplo 2: ~~~A $\vdash$ ~A.

Prova do argumento:

1	~~~A	P
2	~A	1~E

Exemplo 3: ~P → ~~Q, ~~~P $\vdash$ Q.

Prova do argumento:

1	~P → ~~Q	P
2	~~~P	P
3	~P	2~E
4	~~Q	1, 3 MP
5	Q	4 ~E

Faça o exercício de dar significado para a simbolizações, assim como fizemos no exemplo 1 e como você fez na autoatividade do Tópico 2. Depois, compare com seus colegas. Note que é possível que cada um de vocês tenha dado um significado diferente para a mesma representação simbólica. Isso ocorre porque a lógica nos permite representar diversos argumentos da linguagem falada, em uma mesma estrutura de argumento formalizado. E essa é a grande magia da matemática, onde um modelo matemático resolve diversas situações de mesma característica.

Regra 3: **Introdução da Conjunção (∧I ou &I)**

De quaisquer fbfs φ ou Ψ, podemos inferir a conjunção (&).
Simbolicamente: φ, Ψ ⊢ φ & Ψ ou Ψ, φ ⊢ φ & Ψ.

Exemplo 1: Paula é estudiosa. Paula é amiga. Paula é estudiosa e amiga.

A: Paula é estudiosa.
B: Paula é amiga.

Formalização: A, B ⊢ A & B.

Prova do argumento:

1	A	P
2	B	P
3	A & B	1, 2 & I

Exemplo 2: P, Q, R ⊢ (P & Q) & R.

Prova do argumento:

1	P	P
2	Q	P
3	R	P
4	P & Q	1, 2 & I
5	(P & Q) & R	3, 4 & I

Exemplo 3: A, (A & B) → C, ~~B ⊢ C.

Prova do argumento:

1	A	P
2	(A & B) → C	P
3	~~B	P
4	B	3 ~E
5	A & B	1, 4 & I
6	C	2, 5 MP

Exemplo 4: (P & Q) → (R & S), P, ~~Q ⊢ R & S.

Prova do argumento:

1	(P & Q) → (R & S	P
2	P	P
3	~~Q	P
4	Q	3 ~E
5	P & Q	2, 4 & I
6	R & S	1, 5 MP

Regra 4: **Eliminação da Conjunção (∧E ou &E)**

De uma conjunção (&) podemos inferir qualquer um de seus conjuntos (φ ou Ψ).

Simbolicamente: $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \varphi$ ou $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \Psi$

Exemplo 1: Paula é estudiosa e amiga. Paula é estudiosa.

A: Paula é estudiosa.
B: Paula é amiga.

Formalização: A & B ⊢ A.

Prova do argumento:

1	A & B	P
2	A	1 & E

Exemplo 2: A & ~~ B ⊢ B.

Prova do argumento:

1	A & ~~ B	P
2	~~ B	1 & E
3	B	2 ~E

Exemplo 3: A & ~~ B ⊢ A & B.

Prova do argumento:

1	A & ~~ B	P
2	A	1 & E
3	~~ B	1 & E
4	B	3 ~E
5	A & B	2, 4 & I

Exemplo 4: A → (B & C), A ⊢ A & B.

Prova do argumento:

1	A → (B & C)	P
2	A	P
3	(B & C)	1, 2 MP
4	B	3 & E
5	A & B	2, 4 & I

Regra 5: **Introdução da disjunção (∨ I)**

De uma fbf φ podemos inferir a disjunção (∨) com qualquer fbf e φ pode ser o primeiro ou o segundo disjunto da conjunção.
Simbolicamente: $\varphi \vdash \varphi \lor \Psi$ ou $\varphi \vdash \Psi \lor \varphi$.

Exemplo 1: A ⊢ A ∨ B.

Prova do argumento:

1	A	P
2	A ∨ B	1 ∨I (podemos inserir a disjunção com qualquer fbf)

Exemplo 2: A, (A ∨ B) → C ⊢ C.

Prova do argumento:

1	A	P
2	(A ∨ B) → C	P
3	A ∨ B	1 ∨I (podemos inserir a disjunção com qualquer fbf)
4	C	2, 3 MP

Exemplo 3: A ⊢ (A ∨ B) & (A ∨ C).

Prova do argumento:

1	A	P
2	A ∨ B	1 ∨I
3	A ∨ C	1 ∨I
4	(A ∨ B) & (A ∨ C)	2, 3 & I

Exemplo 4: P, ~~ (P → Q) ⊢ (R & S) ∨ Q.

Prova do argumento:

1	P	P
2	~~ (P → Q)	P
3	(P → Q)	2 ~E
4	Q	1, 3 MP
5	(R & S) ∨ Q	4 ∨I (lembre-se de que podemos inserir qualquer fbf para formar a disjunção e (R & S) é uma fbf, pois obedece às regras de formação)

Regra 6: Eliminação da disjunção (∨ E)

Das fbfs $\varphi \lor \Psi$, $\varphi \to \chi$ e $\Psi \to \chi$ podemos inferir a fbf χ.

Simbolicamente: $\varphi \lor \Psi, \varphi \to \chi, \Psi \to \chi \vdash \chi$.

Acadêmico, esta é uma regra um pouco mais complexa que as outras cinco já estudadas. Portanto, preste bem atenção ao exemplo 1.

Exemplo 1: Helena gosta de *rock* ou *jazz* ($R \lor J$). Se Helena gosta de *rock* ($R \to M$), então ela gosta de música. Se Helena gosta de *jazz*, então ela gosta de música ($J \to M$). Segue-se que Helena gosta de música (M).

Simbolicamente: $R \lor J, R \to M, J \to M \vdash M$.

Prova do argumento:

1	$R \lor J$	P
2	$R \to M$	P
3	$J \to M$	P
4	M	1, 2, 3 ∨ E

Exemplo 2: $A \lor A, A \to (B \& C) \vdash C$.

Prova do argumento:

1	$A \lor A$	P
2	$A \to (B \& C)$	P
3	A	1, 2, 2 ∨ E
4	$(B \& C)$	2, 3 MP
5	C	4 & E

Observe que nesta prova, para usarmos a regra de eliminação da disjunção, referimos duas vezes a linha dois. Isso se justifica pelo fato de termos $A \lor A$. Escrevendo em relação ao enunciado da regra, temos: $A \lor A, A \to (B \& C), A \to (B \& C) \vdash (B \& C)$.

Regra 7: **Introdução do Bicondicional ($\leftrightarrow$ I)**

De quaisquer fbfs de formas $\varphi \rightarrow \Psi$ e $\Psi \rightarrow \varphi$, podemos inferir o bicondicional ($\leftrightarrow$). Já estudamos o bicondicional no tópico 2 desta unidade de estudo.

Simbolicamente, $\varphi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \Psi$.

Exemplo 1: Se Pedro estudar, então terá boas notas (E $\rightarrow$ N). Se Pedro tiver boas, então ele estudou (N $\rightarrow$ E). Logo, Pedro terá boas notas se, e somente se, estudar (E $\leftrightarrow$ N).

Formalização: E $\rightarrow$ N, N $\rightarrow$ E $\vdash$ E $\leftrightarrow$ N.

Prova do argumento:

1	E $\rightarrow$ N	P
2	N $\rightarrow$ E	P
3	E $\leftrightarrow$ N	1, 2 $\leftrightarrow$ I

Exemplo 2: A $\rightarrow$ B, (A $\rightarrow$ B) $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ A) $\vdash$ A $\leftrightarrow$ B.

Prova do argumento:

1	A $\rightarrow$ B	P
2	(A $\rightarrow$ B) $\rightarrow$ (B $\rightarrow$ A)	P
3	B $\rightarrow$ A	1, 2 MP
4	A $\leftrightarrow$ B	1, 3 $\leftrightarrow$ I

Exemplo 3: (P $\rightarrow$ Q) & (Q $\rightarrow$ P) $\vdash$ P $\leftrightarrow$ Q.

Prova do argumento:

1	(P $\rightarrow$ Q) & (Q $\rightarrow$ P)	P
2	P $\rightarrow$ Q	1 & E
3	Q $\rightarrow$ P	1 & E
4	P $\leftrightarrow$ Q	2, 3 $\leftrightarrow$ I

Regra 8: **Eliminação do Bicondicional ($\leftrightarrow$ E)**

De quaisquer fbfs da forma $\varphi \leftrightarrow \Psi$, podemos inferir $\varphi \rightarrow \Psi$ ou $\Psi \rightarrow \varphi$.
Simbolicamente: $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$ ou $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \Psi \rightarrow \varphi$.

Exemplo 1: Pedro terá boas notas se, e somente se, estudar (E $\leftrightarrow$ N). Se Pedro estudar, então terá boas notas (E $\rightarrow$ N).

Formalização: E $\leftrightarrow$ N $\vdash$ E $\rightarrow$ N.

Prova do argumento:

1	$E \leftrightarrow N$	P
2	$E \leftrightarrow N$	$1 \leftrightarrow E$

Exemplo 2: $A \leftrightarrow B \vdash (A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$.

Prova do argumento:

1	$A \leftrightarrow B$	P
2	$A \rightarrow B$	$1 \leftrightarrow E$
3	$B \rightarrow A$	$1 \leftrightarrow E$
4	$(A \rightarrow B) \& (B \rightarrow A)$	2, 3 & I

Exemplo 3: $F \leftrightarrow (S \vee D), S \vdash F$.

Prova do argumento:

1	$F \leftrightarrow (S \vee D)$	P
2	S	P
3	$(S \vee D) \rightarrow F$	$1 \leftrightarrow E$
4	$S \vee D$	$2 \vee I$
5	F	3, 4 MP

No caso do bicondicional, os enunciados da forma $\varphi \leftrightarrow \Psi$ são equivalentes aos enunciados da forma $(\phi \rightarrow \Psi) \& (\Psi \rightarrow \varphi)$. Em vista dessa equivalência, as regras de introdução e eliminação para o bicondicional funcionam como &I e &E.

3 REGRAS HIPOTÉTICAS

As duas regras de inferência que ainda faltam, a prova do condicional e redução ao absurdo, diferem das outras, pois empregam raciocínio hipotético. Raciocínio hipotético é um raciocínio baseado em uma hipótese; uma suposição feita a fim de mostrar que uma conclusão particular segue daquela suposição. De modo diferente de outras suposições de uma prova, as hipóteses não são declaradas como verdadeiras. Elas são "artifícios lógicos", as quais acolhemos temporariamente, como um tipo especial de estratégia de prova.

Regra 9: Prova do Condicional (PC) ou Introdução do Condicional (→ I)

Dada uma derivação de uma fbf Ψ a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir $\varphi \leftrightarrow \Psi$.

Numa prova que embute raciocínio hipotético, uma linha vertical marca sua duração: inicia com o lançamento de uma hipótese φ. No caso da Prova do Condicional (PC), ela termina quando outra fpf Ψ desejada é derivada. Na linha seguinte, lançamos a conclusão $\varphi \rightarrow \varphi$ da PC. Justificamos com "m-n PC", onde m-n é o intervalo de linhas de duração do raciocínio hipotético.

Exemplo 1: Vamos supor que você deseja convencer um atleta de não continuar correndo (em treino). Para isso, você lança o seguinte argumento:

"Seu tornozelo está inchado (I). Se o seu tornozelo está inchado e você continuar correndo de bicicleta (C), então seu tornozelo não irá sarar (S). Se ele não sarar até domingo, então você não estará apto à prova (~P). Portando, se você continuar correndo de bicicleta, então não estará apto para a prova".

Se o atleta responde: "Prove isso!".

Você poderia argumentar discursivamente, da seguinte forma:

"Faça de conta que você continua correndo de bicicleta. Com seu tornozelo inchado e você correndo de bicicleta, o seu tornozelo não irá sarar até domingo e, por conseguinte, você não estará apto. Portanto, se você insiste em continuar correndo de bicicleta, você não estará apto no domingo para participar da prova."

Quando você diz ao atleta "faça de conta que você continua correndo de bicicleta" está sendo lançada uma hipótese. Formalizando o argumento temos:

I, (I & C) → ~S, ~S → ~A ⊢ C → ~A

Acadêmico, veja que a conclusão é uma proposição condicional, pois não se encontra em parte alguma dentro das premissas. Neste caso, devemos utilizar a Prova do Condicional (PC). Vejamos a prova do argumento:

1	I	P
2	(I & C) → ~S	P
3	~S → ~A	P
4	C	H para PC (hipótese para prova do condicional)
5	I & C	1, 4 & I
6	~S	2, 5 MP
7	~A	3, 6 MP
8	C → ~A	4 – 7 PC (prova do condicional)

Acadêmico, observe que a linha 4 corresponde ao lançamento da hipótese "faça de conta que você continua correndo de bicicleta".

Acadêmico, note que a abertura da hipótese deve ocorrer com o antecedente da condicional e o fechamento deve ocorrer quando obtemos seu consequente. Observe isso na prova do segundo argumento.

Exemplo 2: $A \rightarrow B, B \rightarrow C \vdash A \rightarrow C$.

Prova do argumento:

1	$A \rightarrow B$	P
2	$B \rightarrow C$	P
3	A	H para PC
4	B	1, 3 MP
5	C	2, 4 MP
6	$A \rightarrow C$	3 – 5 PC

Este argumento é uma instância particular de uma regra derivada que será apresentada posteriormente, denominada "Silogismo Hipotético".

Exemplo 3: $(P \& Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

Prova do argumento:

1	$(P \& Q) \rightarrow R$	P
2	P	H para PC
3	Q	H para PC
4	$P \& Q$	2, 3 & I
5	R	1,4 MP
6	$Q \rightarrow R$	3 – 5 PC
7	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	2 – 6 PC

Exemplo 4: $P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q \vee R$

Prova do argumento:

1	$P \rightarrow Q$	P
2	$P \vee R$	P
3	P	H para PC
4	Q	1, 3 MP
5	$Q \vee R$	4 VI
6	$P \rightarrow (Q \vee R)$	3 – 5 PC
7	R	H para PC
8	$Q \vee R$	7 VI
9	$R \rightarrow (Q \vee R)$	7 – 8 PC
10	$Q \vee R$	2, 6, 9 VE

Quando usamos o raciocínio hipotético, as regras a seguir devem ser observadas:

- cada hipótese introduz numa prova o início de uma nova linha vertical;
- nenhuma ocorrência de uma fórmula à direita de uma linha vertical pode ser usada em qualquer regra aplicada depois que terminar a linha vertical;
- se duas ou mais hipóteses são vigentes simultaneamente, então a ordem na qual elas são descartadas deve ser a ordem inversa de sua introdução;
- uma prova não está completa até que todas as hipóteses sejam descartadas (encerradas).

A próxima regra de inferência recebe o nome de Redução Ao Absurdo (RAA). Para ela, é necessário derivar uma contradição. O raciocínio hipotético encerra quando uma contradição é alcançada. Uma contradição é qualquer fbf da forma φ & ~ φ. Sua principal característica é que ela sempre é falsa. Desta forma, se a partir de uma hipótese alcançamos uma contradição, a hipótese é inválida, e assim inferimos sua negação como válida.

Regra 10: **Redução ao Absurdo (RAA) ou Introdução da Negação (~ I)**

Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir ~ φ.

Exemplo 1: Se amanhã houver sol, então iremos ao parque. Não fomos ao parque. Portanto, não houve sol.

Formalizando: $S \rightarrow P, \sim P \vdash \sim S$.

Acadêmico, esta é uma regra derivada, denominada *Modus Tollens*. Estudaremos mais sobre as regras derivadas no próximo tópico.

Prova do argumento:

1	$S \rightarrow P$	P
2	$\sim P$	P
3	S	H para RAA (hipótese para redução ao absurdo, queremos provar ~S)
4	P	1, 3 MP
5	$P \;\&\; \sim P$	2, 4 & I (ser e não ser é um absurdo, assim, finalizamos a RAA)
6	$\sim S$	3 – 5 RAA

Exemplo 2: $S \leftrightarrow \sim D \vdash \sim(S \;\&\; D)$

Prova do argumento:

1	$S \leftrightarrow \sim D$	P
2	$S \;\&\; D$	H para RAA
3	S	2 & E
4	D	2 & E
5	$S \rightarrow \sim D$	$1 \leftrightarrow$ E
6	$\sim D$	3, 5 MP
7	$D \;\&\; \sim D$	4, 6 & I
8	$\sim(S \;\&\; D)$	2 – 7 RAA

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, estudamos:

- As dez regras de inferências, sendo oito não hipotéticas e duas hipotéticas, que constituem as regras básicas do cálculo proposicional, as quais introduzem ou eliminam os conectivos e que podemos verificar no quadro resumo a seguir.

QUADRO RESUMO – REGRAS DE INFERÊNCIAS NÃO HIPOTÉTICAS

INTRODUÇÃO DA REGRA	ELIMINAÇÃO DA REGRA
• *Modus Ponens (MP)* $\varphi \rightarrow \Psi, \varphi \vdash \Psi$	• *Eliminação da Negação (~E)* $\sim\sim\varphi \vdash \varphi$
• *Introdução da Conjunção (&I)* $\varphi, \Psi \vdash \varphi \,\&\, \Psi$ ou $\varphi, \Psi \vdash \Psi \,\&\, \varphi$	• *Eliminação da Conjunção (&E)* $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \varphi$ ou $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \Psi$
• *Introdução da Disjunção (VI)* $\varphi \vdash \varphi \vee \Psi$ ou $\varphi \vdash \Psi \vee \varphi$	• *Eliminação da Disjunção (VE)* $\varphi \vee \Psi, \varphi \rightarrow \chi, \Psi \rightarrow \chi \vdash \chi$
• *Introdução do Bicondicional (↔ I)* $\varphi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \Psi$	• *Eliminação do Bicondicional (VE)* $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$ ou $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \Psi \rightarrow \varphi$

FONTE: A autora

QUADRO RESUMO - REGRAS DE INFERÊNCIAS HIPOTÉTICAS

• *Introdução do Condicional (→ I)* Dada uma derivação de uma fórmula bem formada (fbf) Ψ a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir $\varphi \rightarrow \Psi$.
• *Redução ao Absurdo (RAA)* Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir $\sim\varphi$.

FONTE: A autora

AUTOATIVIDADE

Acadêmico, o processo de provar um argumento pode não ser fácil no começo. Porém, não desista! É normal escolhermos caminhos que não nos levem à prova do argumento nas primeiras tentativas, mas o importante é reconhecer que a escolha foi errada e recomeçar outra vez. Mãos à obra! Utilize o quadro resumo das regras de inferências para provar os 12 argumentos a seguir.

$P \leftrightarrow Q, Q \leftrightarrow R \vdash P \leftrightarrow R$

$P \leftrightarrow Q \vdash \sim P \leftrightarrow \sim Q$

$P \rightarrow Q, P \rightarrow \sim Q \vdash \sim P$

$(P \rightarrow Q) \;\&\; (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \;\&\; R)$

$P \rightarrow Q \vdash (P \;\&\; R) \rightarrow (Q \;\&\; R)$

$P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$

$\sim P \rightarrow P \vdash P$

$\sim P \vdash P \rightarrow Q$

$P \;\&\; Q \vdash P \rightarrow Q$

$P \rightarrow \sim (R \;\&\; S), P \;\&\; R \vdash \sim S$

$P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash \sim R \rightarrow \sim P$

$(P \;\&\; Q) \vee (P \;\&\; R) \vdash P \;\&\; (Q \vee R)$

REGRAS DERIVADAS, TEOREMAS E IMPLICAÇÕES

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, estudamos as regras de inferência não hipotéticas e hipotéticas e aprendemos que por meio delas podemos demonstrar vários raciocínios bastante recorrentes. Estes raciocínios, uma vez demonstrados, podem ser usados como regras. Estas regras não são necessárias, mas são bastante úteis, tornando nossas provas muito mais sucintas. Iniciaremos com as regras derivadas das regras de inferência.

2 REGRAS DERIVADAS

As dez regras básicas de inferência são completas, no sentido de que elas geram uma prova para cada uma das muitas formas válidas expressas na linguagem da lógica proposicional. Porém, é útil ter outras. Estas novas regras não nos habilitam a provar algo novo que não possa ser provado somente pelas dez regras básicas, mas nos ajudam a simplificar as provas. No quadro abaixo, o resumo das regras derivadas.

QUADRO 1 - REGRAS DERIVADAS

REGRA DERIVADA	**NOME**
$\varphi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$	SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH)
$\varphi \rightarrow \Psi, \sim\Psi \vdash \sim\varphi$	*MODUS TOLLENS* (MT)
$\varphi, \sim\varphi \vdash \Psi$	CONTRADIÇÃO (CONTRAD)
$\varphi \vdash \varphi$	REPETIÇÃO (REP)
$\varphi \vee \Psi, \sim\varphi \vdash \Psi$	SILOGISMO DISJUNTIVO (SD)
$\varphi \vee \Psi, \varphi \rightarrow \chi, \Psi \rightarrow \theta \vdash \chi \vee \theta$	DILEMA CONSTRUTIVO (DC)

FONTE: A autora

As regras de **silogismo hipotético** e ***modus tollens*** já foram provadas através dos exemplos anteriormente vistos no Tópico 3. Seguem as demais provas de regras derivadas, lembrando que no lugar das letras gregas que ocorrem nas regras utilizamos as letras proposicionais.

Regra derivada: **Contradição**

Diz que uma proposição verdadeira não pode ser falsa e uma proposição falsa não pode ser verdadeira. Nenhuma proposição, portanto, pode ser os dois ao mesmo tempo. Quando isso ocorrer, temos uma contradição, o que nos permite inferir qualquer fbf.

Simbolicamente: P, ~P ⊢ Q.

Prova da regra derivada:

1	P	P
2	~P	P
3	~Q	H para RAA
4	P & ~P	1,2 & I
5	~~Q	3-4 RAA
6	Q	5 ~E

Acadêmico, a partir de duas premissas que formam uma contradição podemos inferir qualquer fbf (a escolha é livre).

Regra derivada: **Repetição**

A prova é mais simples que se pode imaginar. A única linha contém a premissa, mas também já contém a conclusão. Não foi preciso aplicar nenhuma regra de inferência.

Simbolicamente: P ⊢ P.

Prova da regra derivada:

1	P	P

Regra derivada: **Silogismo Disjuntivo**

O Silogismo Disjuntivo é utilizado nos argumentos do tipo P ou Q, não P, então Q. A situação a seguir, representa uma das situações possíveis para este argumento.

Maria tem mais que 12 anos ou ela é uma criança. Ela não tem mais que 12 anos. Logo, ela é uma criança.

P: Maria tem mais que 12 anos.
Q: Maria ser uma criança.

Simbolicamente: $P \lor Q, \sim P \vdash Q$.

Prova da regra derivada:

1	$P \lor Q$	P
2	$\sim P$	P
3	P	H para PC
4	Q	2,3 CONTRAD
5	$P \to Q$	3-4 PC
6	Q	H para PC
7	$Q \to Q$	6-6 PC
8	Q	1,5,7 $\lor$ E

Regra derivada: **Dilema Construtivo**

O dilema construtivo é a inferência do tipo "se P implica Q e R implica S, e P ou R é verdade, então Q ou S tem que ser verdade". Ou seja, se duas condicionais são verdades e pelo menos um de seus antecedentes também o é, então pelo menos um de seus consequentes também precisa ser. O dilema construtivo tem este nome por causa da transferência de operandos disjuntivos.

Vejamos uma situação que faz esse tipo de inferência:

Ou eu passarei no vestibular, ou minha amiga passará no vestibular. Se eu passar no vestibular, irei cursar matemática. Se minha amiga passar no vestibular, ela irá cursar direito. Portanto, ou eu cursarei matemática, ou minha amiga cursará direito.

P: Eu passar no vestibular.
Q: Minha amiga passar no vestibular.
R: Eu cursar matemática.
S: Minha amiga cursar direito.

Simbolicamente: $P \lor Q, P \to R, Q \to S \vdash R \lor S$.

Prova da regra derivada:

1	P ∨ Q	P
2	P → R	P
3	Q → S	P
4	P	H para PC
5	R	2, 4 MP
6	R ∨ S	5 ∨ I
7	P → (R ∨ S)	4-6 PC
8	Q	H para PC
9	S	3, 8 MP
10	R ∨ S	9 ∨ I
11	Q → (R ∨ S)	8-10 PC
12	R ∨ S	1, 7, 11 ∨ E

Vejamos, a seguir, alguns argumentos os quais podemos usar as regras derivadas para simplificar sua prova.

Exemplo 1: A ⊢ B → A

Prova do argumento:

1	A	P
2	B	H para PC
3	A	REP
4	B → A	2-3 PC

Veja que na linha 3 utilizamos a regra derivada de repetição.

Exemplo 2: P ∨ ~Q, R → Q, ~P ⊢ ~R

Prova do argumento:

1	P ∨ ~Q	P
2	R → Q	P
3	~P	P
4	~Q	1, 3 SD
5	~R	2, 4 MT

Na linha 4, utilizamos a regra derivada denominada silogismo disjuntivo, e na linha 5, a *modus tollens*. Note, o quanto o uso das regras derivadas simplifica a prova.

Exemplo 3: A → B, B → C, ~(A → C) ⊢ A & ~A

Prova do argumento:

1	A → B	P
2	B → C	P
3	~(A → C)	P
4	A → C	1, 2 SH
5	A & ~A	3, 4 CONTRAD

Na linha 4 inserimos a regra derivada denominada silogismo hipotético e na linha 5, a contradição.

Acadêmico, nós já orientamos isso anteriormente, mas vale reforçar que as letras gregas representam fbfs, onde pode ser uma letra proposicional ou uma fórmula que atenda os critérios para ser bem formada.

3 TEOREMAS

Segundo Imenes e Lellis (2007, p. 307), "um teorema é um fato matemático verdadeiro que pode ser demonstrado a partir de outros teoremas ou de axiomas". Para a Lógica, teoremas são inferência sem premissas, isto é, possuem apenas uma conclusão. Também são conhecidos como leis do cálculo proposicional. Os teoremas apresentam essa denominação porque são verdades independentes de qualquer consideração.

Vejamos alguns exemplos de teoremas.

Teorema 1: ⊢ ~(P & ~P)

Prova:

1	P & ~P	H para RAA
2	~(P & ~P)	1-1 RAA

Teorema 2: ⊢ P → (P V Q)

Prova:

1	P	H para PC
2	P V Q	1 V I
3	P → (P V Q)	1-2 PC

Teorema 3: $\vdash P \vee {\sim}P$

Prova:

1	$\sim(P \vee {\sim}P)$	H para RAA
2	P	H para RAA
3	$P \vee {\sim}P$	2 $\vee$ I
4	$(P \vee {\sim}P)\ \&\ {\sim}(P \vee {\sim}P)$	1, 3 & I
5	${\sim}P$	2-4 RAA
6	$P \vee {\sim}P$	5 $\vee$ I
7	$(P \vee {\sim}P)\ \&\ {\sim}(P \vee {\sim}P)$	1, 6 & I
8	$\sim(P \vee {\sim}P)$	1-7 RAA
9	$P \vee {\sim}P$	8 ~E

Toda instância de um teorema é provável sob qualquer conjunto de suposição. Portanto, pode-se introduzir um teorema ou quaisquer de suas instâncias substitutivas da mesma forma como se fosse uma premissa adicional em qualquer linha de prova. Como ocorre nas regras derivadas, o objetivo de usar *Introdução de um Teorema (IT)* é tornar as provas mais curtas. Vejamos um exemplo do uso da *Introdução de um Teorema (IT)*.

Argumento: $P \rightarrow Q$, ${\sim}P \rightarrow Q \vdash Q$.

Prova:

1	$P \rightarrow Q$	P
2	${\sim}P \rightarrow Q$	P
3	$P \vee {\sim}P$	IT (teorema 3)
4	Q	1, 2, 3 $\vee$ E

4 IMPLICAÇÕES

Uma implicação é um teorema cujo operador principal é um condicional. Portanto, possui a forma $\vdash \varphi \rightarrow \Psi$, podendo também ser escrito alternativamente como $\varphi \Rightarrow \Psi$, lido como "φ implica em Ψ".

ATENÇÃO

> Embora a grande semelhança simbólica entre $\varphi \rightarrow \Psi$ e $\varphi \Rightarrow \Psi$, eles não significam a mesma coisa, pois $\rightarrow$ é um operador lógico, enquanto $\Rightarrow$ é uma relação, onde $\varphi \Rightarrow \Psi$ significa que Ψ pode ser derivado de φ sem necessidade de nenhuma premissa ou hipótese.

No teorema 2, provado anteriormente, temos um exemplo de implicação.

Teorema 2: $\vdash P \rightarrow (P \vee Q)$.

Ele poderia ser posto como: $P \Rightarrow (P \vee Q)$.

Acadêmico, o símbolo $\Rightarrow$ (implica) é utilizado com frequência em lemas, proposições e teoremas matemáticos. Por exemplo, quando dizemos na Álgebra: x é divisível por 8 $\Rightarrow$ x é divisível por 2.

5 EQUIVALÊNCIAS

Equivalência é um teorema que possui a forma bicondicional $\vdash \varphi \leftrightarrow \Psi$, podendo, alternativamente, ser escrito como $\varphi \Leftrightarrow \Psi$ e lido como “ φ equivale à Ψ. O esquema de prova de uma equivalência segue os seguintes passos:

1. Provar $\varphi \rightarrow \Psi$ usando a prova do condicional.

2. Provar $\Psi \rightarrow \varphi$ usando a prova do condicional.

3. Usar a regra $\leftrightarrow$ I sobre os dois resultados anteriores para obter $\varphi \leftrightarrow \Psi$.

Existem equivalências importantes que conduzem a teoremas gerais, os quais apresentamos no quadro a seguir.

QUADRO 2 - EQUIVALÊNCIAS

NOME	EQUIVALÊNCIA
Tautologia (TAUT)	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
	$\varphi \,\&\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$
Comutativa (COM)	$\varphi \vee \Psi \Leftrightarrow \Psi \vee \varphi$
	$\varphi \,\&\, \Psi \Leftrightarrow \Psi \,\&\, \varphi$
Associativa (ASSOC)	$\varphi \vee (\Psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \Psi) \vee \chi$
	$\varphi \,\&\, (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \,\&\, \chi$
Distributiva (DIST)	$\varphi \,\&\, (\Psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \vee (\varphi \,\&\, \chi)$
	$\varphi \vee (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \Psi) \,\&\, (\varphi \vee \chi)$
Lei de Morgam (DM)	$\sim(\varphi \,\&\, \Psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \sim\Psi$
	$\sim(\varphi \vee \Psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \,\&\, \sim\Psi$
Implic. Material (IM)	$\varphi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \Psi$
	$\sim(\varphi \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow \varphi \,\&\, \sim\Psi$
Dupla Negação (DN)	$\varphi \Leftrightarrow \sim\sim\varphi$
Transposição (TRAN)	$\varphi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\Psi \rightarrow \sim\varphi$
Exportação (EXP)	$(\varphi \,\&\, \Psi) \rightarrow \chi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \chi)$
Ambivalência (AMB)	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\varphi \leftrightarrow \sim\Psi$
	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \vee (\sim\varphi \,\&\, \sim\Psi)$

FONTE: A autora

Acadêmico, acompanhe a prova de algumas destas equivalências.

Equivalência: Dupla Negação (DN)

Simbolicamente: $\vdash P \Leftrightarrow \sim\sim P$ ou $\vdash P \leftrightarrow \sim\sim P$

Prova da equivalência:

1	P	H para PC
2	~P	H para RAA
3	P & ~P	1, 2 &I
4	~~P	2-3 RAA
5	P → ~~P	1-4 PC
6	~~P	H para PC
7	P	6 ~E
8	~~P → P	6-7 PC
9	P ↔ ~~P	5, 8 ↔I

Equivalência: Distributiva (DIST)

Simbolicamente: $\vdash P \,\&\, (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \,\&\, Q) \vee (P \,\&\, R)$

Prova da equivalência:

1	P & (Q V R)	H para PC
2	P	1 &E
3	Q V R	1 &E
4	Q	H para PC
5	P & Q	2, 4 &I
6	Q → (P & Q)	4-5 PC
7	R	H para PC
8	P & R	2, 7 &I
9	R → (P & R)	7-8 PC
10	(P & Q) V (P & R)	3, 6, 9 DC
11	P & (Q V R) → (P & Q) V (P & R)	1-10 PC
12	(P & Q) V (P & R)	H para PC
13	P & Q	H para PC
14	P	13 &E
15	(P & Q) → P	13-14 PC
16	P & R	H para PC
17	P	16 &E
18	(P & R) → P	16-17 PC
19	P	12, 15, 18 VE
20	P & Q	H para PC
21	Q	20 &E
22	(P & Q) → Q	20-21 PC
23	P & R	H para PC
24	R	23 &E
25	(P & R) → R	23-24 PC
26	Q V R	12, 22, 25 DC
27	P & (Q V R)	19, 26 &I
28	(P & Q) V (P & R) → P & (Q V R)	12-27 PC
29	P & (Q V R) ↔ (P & Q) V (P & R)	11, 28 ↔ I

Equivalência: Lei de Morgan (DM)

Simbolicamente: ⊢ ~(P & Q) ⇔ ~P V ~Q

Prova da equivalência:

1	~(P & Q)	H para PC
2	~(~P V ~Q)	H para RAA
3	~P	H para RAA
4	~P V ~Q	3 VI
5	(~P V ~Q) & ~(~P V ~Q)	2, 4 &I
6	~~P	3-5 RAA
7	P	6 ~E
8	~Q	H para RAA
9	~P V ~Q	8 VI
10	(~P V ~Q) & (~P V ~Q)	2, 9 &I
11	~~Q	8-10 RAA

12	Q	11 ~E
13	P & Q	7, 12 &I
14	(P & Q) & ~(P & Q)	1, 13 &I
15	~~(~P V ~Q)	2-14 RAA
16	~P V ~Q	15 ~E
17	~(P & Q) → (~P V ~Q)	1-16 PC
18	~P V ~Q	H para PC
19	~P	H para PC
20	P & Q	H para RAA
21	P	20 &E
22	P & ~P	19, 21 &I
23	~(P & Q)	22-23 RAA
24	~P → ~(P & Q)	19-23 PC
25	~Q	H para PC
26	P & Q	H para RAA
27	Q	26 &E
28	Q & ~Q	25, 27 &I
29	~(P & Q)	26-28 RAA
30	~Q → ~(P & Q)	25-29 PC
31	~(P & Q)	18, 24, 30 VE
32	(~P V ~Q) → ~(P & Q)	18-31 PC
33	~(P & Q) ↔ (~P V ~Q)	17, 32 ↔ I

DICAS

Exercite! Tente provar as demais equivalências descritas na tabela.

Vejamos alguns exemplos de argumentos, os quais podemos simplificar sua prova utilizando equivalências.

Exemplo 1: ~P V Q ⊢ ~(P & ~Q)

Prova:

1	~P V Q	P
2	P & ~Q	H para RAA
3	P	2 & E
4	~Q	2 & E
5	~~P	2 DN
6	Q	1, 5 SD
7	Q & ~Q	4, 6 & I
8	~(P & ~Q)	2-7 RAA

Exemplo 2: ~(P & Q), P ⊢ ~Q

Prova:

1	~(P & Q)	P
2	P	P
3	~P ∨ ~Q	1 DM
4	~~P	2 DN
5	~Q	3, 4 SD

Exemplo 3: (~P ∨ Q) & P ∨ Q

Prova:

1	(~P ∨ Q) & P	P
2	~P ∨ Q	1 & E
3	P	1 & E
4	P → Q	2 IM
5	Q	3, 4 MP

LEITURA COMPLEMENTAR

ESCORÇO HISTÓRICO DA LÓGICA MATEMÁTICA

Carlos Magno Corrêa Dias *

Compor considerações, mesmo que resumidas sobre a história da Lógica Matemática, é labuta que solicita, para além do dogmatismo, considerável grau de particularização sobre a história da evolução do pensamento humano. Porquanto, alerte-se, de início, que, em princípio, seria de todo impossível traduzir, com rigor e especialização, a diversificada amálgama de prescrições e condicionamentos que encetam ser a Lógica "a arte que dirige o próprio ato da razão".

Assim, no presente estudo, tenciona-se apresentar, de forma objetiva, porém em sentido compendiado, considerações basilares sobre o caminho histórico que levou o homem a aceitar, não antes sem acirrados exames, a impregnação mútua entre Matemática e Lógica; para, posteriormente, difundir o que, hodiernamente, com a devida propriedade, predica-se qualificar Lógica Matemática.

Assim, percorrendo a estrada da evolução do conhecimento, encontra-se nos estudos de Aristóteles (384-322 a.C.) a primeira sistematização relacional do tema que viria, ulteriormente, a ser intitulado Lógica; sendo que, saliente-se, o vocábulo "lógica" somente assumiria o contexto moderno cerca de quinhentos anos após a morte do filósofo grego, quando Alexandre de Afrodísias a utilizou. Contudo, não se pode deixar de dizer que o âmbito da investigação lógica tem sua essência determinada pelo conteúdo dos tratados sobre o raciocínio reunidos no que se arbitrou denominar Organon de Aristóteles.

Em síntese, o Organon de Aristóteles institui, por seu conjunto de asserções, um instrumento do qual se serviria a razão para atingir a plenitude da verdade. Diga-se, sem exagero algum, que os trabalhos de Aristóteles fundamentaram a hoje chamada Lógica Formal. Porquanto, pela primeira vez na história da humanidade são estabelecidos: uma concepção de validade universal, o emprego de variáveis, valores-verdade dicotômicos; bem como, formas sentenciais contendo apenas constantes lógicas; sendo a Silogística de Aristóteles uma obra capital.

Passando, Aristóteles, a tomar, em suas discussões, sentenças enunciativas constituídas de termos na forma designação-atributo, onde um termo, a desiganação, é vinculado a outro, o atributo, por meio da ligação "é" quando da concordância entre os termos, ou "não é" quando a designação e o atributo estão em discordância; tem-se principiado a Lógica Bivalente (base estrutural da Lógica Formal); pois que quando a concordância ou a discordância asseverada for confirmada promulga-se que o enunciado assume o valor-verdade Verdade, mas, em sentido oposto, assume o valor-verdade Falsidade; e, tais valores-verdade são mutuamente excludentes.

Contudo, registre-se, que as fórmulas lógicas, formuladas a partir dos enunciados qualificados acima, consistiam de palavras da linguagem ordinária, sujeitas às regras sintáticas usuais; ou seja, os teoremas lógicos eram derivados da linguagem usual, não se servindo de uma metalinguagem.

Pode-se, desta forma, em sentido restrito, particularizar a Lógica de Aristóteles, no que tange à Silogística, como estando associada ao que, nos dias atuais, entende-se por Lógica das Classes (ou dos Predicados). Por outro lado, Aristóteles vem formular a maioria de seus resultados na forma de condicionais traduzidos em linguagem objeto e o estado ontológico de suas fórmulas não se encontra perfeitamente estruturado, uma vez que não se tem bem definido se aquelas são sequências de sinais, estruturas mentais ou estruturas objetivas. Mas, a despeito de tais observações, constitui a Lógica de Aristóteles um marco na história da sistematização do raciocínio humano; atribuindo-se, sem embargo, ao mesmo o título de fundador da Lógica; porquanto, durante mais de dois mil anos quase todos os estudos sobre Lógica têm sido influenciados pelo fascinante e extraordinário "pensamento" aristotélico.

No fim da Antiguidade tinha-se instaurado duas grandes correntes correlacionadas com a Lógica; quais sejam: a Peripatética, derivada de Aristóteles; e, a Estoica, desenvolvida por Crísipo (281-205 a.C.) a partir dos Megáricos. A Escola do Megáricos, segundo se pode deduzir, teria seus ensinamentos concentrados na dialética de Zenon (335-264 a.C.), fundador da Escola dos Estoicos (Escola do Pórtico), bem como, nas disputas dialéticas que, posteriormente, segundo Platão (427-347 a.C.) e Aristóteles, chamou-se Erística. Apesar da Lógica dos Estoicos e Megáricos permanecer subjugada pelas ideias de Aristóteles por mais de vinte séculos, há de se exaltar, atualmente, que muitos dos aspectos desenvolvidos na Lógica atual encontram correspondência na Lógica dos Estoicos e Megáricos.

Dentre as contribuições apresentadas pelos Estoicos e Megáricos para o desenvolvimento da Lógica há de se considerar: a invenção de uma série de paradoxos, a reexaminação dos conceitos modais e o debate sobre a natureza das frases declarativas. Acrescente-se, também, que foram os Estoicos os primeiras a elaborar uma teoria da demonstração com proposições condicionais, como também, diversas outras formas de proposições complexas. Embora os Estoicos e Megáricos tenham desenvolvido aspectos não verificados em Aristóteles, observa-se que estes obtiveram resultados compatíveis com os daquele.

Em termos gerais, a Escola Megárico-Estoica é particularizada, em contraposição com a Escola de Aristóteles, segundo três posicionamentos distintos, quais sejam: a Lógica Megárico-Estoica é uma Lógica das Proposições, existe a formulação de regras de inferência traduzidas por uma metalinguagem, e tem-se elaborado uma teoria dos sinais onde os teoremas são enunciados de forma a apresentar um significado ao nível do domínio (universo) relacional. Saliente-se, a propósito, portais peculiaridades, que as investigações lógicas desta escola deslumbram-se mais conscientes do efetivo fim das mesmas do que quaisquer um de seus predecessores; além do mais, alocaram um lugar definido a seus estudos no esquema do conhecimento humano, defendendo uma doutrina definida sobre o conteúdo da Lógica.

Diz-se, em intenção, que os Estoicos deram início ao que na atualidade predica-se chamar Cálculo Proposional (o organismo fundamental da Lógica Matemática, sem o qual o Cálculo das Funções Proposicionais não poderia ser elaborado de forma sistemática); pois que, os Estoicos manipularam as inferências que dependiam apenas de noções expressas pela conexão de enunciados na forma designação-atributo em sentenças complexas, enquanto que, por exemplo, Aristóteles direcionou seus estudos sobre inferências que envolviam relações entre termos gerais. Nestas condições, diz-se, portanto, que a Lógica das Proposições, estudada pelos Estoicos, é mais "fundamental" do que a Lógica dos Termos Gerais, estudada por Aristóteles; o que pode conduzir aos conceitos de Lógica Geral e Lógica Primária, sendo que a primeira não pode ser desenvolvida sem a segunda, mas esta última pode vir a constituir uma teoria independente. Assim, por exemplo, a Dialética de Crísipo corresponde à Lógica Primária, enquanto que a Silogística de Aristóteles pode ser encarada como uma parte da Lógica Geral.

Como a Lógica Megárico-Estoica trabalha com teoremas lógico sentenciais, ao nível da Semântica, esta principia o formalismo lógico; já que apresenta uma notável elaboração da técnica lógico-formal das tabelas de valores corretamente estabelecidos e um notável posicionamento sobre a discussão do sentido da implicação. Tem-se a axiomatização da Lógica Sentencial com evidente distinção entre leis e metateoremas.

Ao passar dos séculos, após o surgimento do período dos Megáricos-Estoicos em Lógica, constata-se uma quase obscuridade total quanto ao levantamento de novos questionamentos e/ou o desenvolvimento específico de outras pesquisas sobre a Lógica. Nada de relevante foi desenvolvido até o século XI, segundo as poucas obras de que se tem conhecimento; uma vez que a grande maioria, ou quase totalidade, dos estudos limitaram-se a estabelecer traços de convergência entre os estudos aristotélicos e os estoicos. Diga-se, porém, que as tentativas de "união" das correntes anteriores têm seu ápice na obra de Boécio (480-524), a qual, quando da retomada do estudo da Lógica por volta do século décimo da era atual, era mais conhecida do que a de Aristóteles. Assim, corrobora-se a assertiva de que Boécio é "essencialmente importante como um agente de transmissão da cultura clássica para a Idade Média".

No atual estado de investigação sobre a história da Idade Média há de se afirmar, em verdade, que muito pouco se sabe sobre os trabalhos lógicos desenvolvidos neste período. Os estudos apresentados pelos especialistas mostram uma estagnação, e/ou uma fase de decadência, em termos de novos posicionamentos sobre a Lógica até Pedra Aberlado (1079-1142).

Tomando-se por fundamento os trabalhos difundidos sobre a filosofia medieval, pode-se apresentar a forma Escolástica da Lógica dividida em três períodos distintos; quais sejam: o Período de Transição, o Período Criador e o Período de Elaboração. Contudo, de forma ampla, ressalte-se que a Lógica Escolástica embora trabalhe com a linguagem ordinária, seu desenvolvimento se caracteriza por regras sintáticas diferenciadas e por funções semânticas especializadas; contudo, os teoremas lógicos continuam derivados de uma linguagem usual.

No primeiro período, como já abordado, que culmina com Abelardo, nenhum novo problema foi tratado e diga-se, a bem da verdade, o legado do passado era conhecido imperfeitamente. Já, no segundo período, que se estende até os fins do século XIII, iniciando-se em meados de 1150, retomam-se os conhecimentos centrados em épocas passadas. Além do mais, começam a surgir novas problemáticas tais quais as questões sobre as propritates terminorum. No Período Criador tem-se como a obra mais conhecida as Summulae Logicales de Pedro Hispano (falecido em 1277); podendo-se destacar, também, os pensadores Alberto Magno (1193-1280), Roberto Kildwardby (falecido em 1279) e Guillermo de Shyreswood (falecido em 1249). Por fim, no terceiro período, que tem seu início com Guillermo de Ockham (falecido em 1349/50), atingindo seu término no século XV com o fim da Idade Média, tem-se a fase da sistematização do conhecimento, onde deve-se salientar os trabalhos sobre Lógica Formal e sobre Semiótica. Esclareça, entretanto, que a Lógica Escolástica, em sentido completo, apresenta-se a um nível mais elevado que o Organon, tratando, também, das questões impostas pela Lógica Megárico-Estoica; é pois, segundo afirmam os pesquisadores, nesta fase que surge realmente uma Lógica Formal.

Pondere-se, também, que a Lógica Escolástica desenvolveu uma forma inteiramente nova de Lógica Formal, pois que esta consiste da intenção de abstrair da linguagem usual as leis e regras desta mesma linguagem para atender o sentido mais amplo de funções semânticas e sintáticas dos símbolos, quase instituindo uma metalinguagem. Além do que os problemas e técnicas da Lógica Sentencial apresentam-se de forma mais "abstrata" do que em quaisquer outras épocas. A despeito de tais ponderações, acrescente-se que a Lógica Modal assume, na Escolástica, grau de investigação nunca antes verificado.

Dos cerca de quatrocentos anos que compreendem o meio do século XV ao meio do século XIX tem-se apresentado diversos tratados de Lógica, contudo muito poucas destas obras abordam algo que seja inteiramente novo ou que não seja trivial; verifica-se mais uma recapitulação do anteriormente estabelecido do que criações inovadoras propriamente ditas. Contudo, neste período, pode-se particularizar três tendências distintas: a do Humanismo (que pode ser taxado como um movimento radical de simples negação da Escolástica), a da Lógica Clássica (em sentido estrito) e das novas tentativas de ampliação da Lógica Clássica.

Sobre o Humanismo, diga-se apenas que este estava mais preocupado com os problemas afetos à Retórica, à Psicologia e à Epistemologia do que com questões orientadas à Lógica. De forma geral, reputavam sua objeção à Escolástica e à Lógica Medieval por serem estas, não “falsas” na essência, mas antes por apresentarem natureza bárbara no estilo e constituírem teoria sem interesse no conteúdo.

Todavia, o posicionamento estéril preposto pelo Humanismo não durou muito tempo. E, em seguida, uma Lógica Formal predicada como Clássica, em sentido estrito, emergiu. Tem sua fundamentação a partir da Logique ou /’art de penser de P. Nicole (1625-1695) e A. Arnault (1612-1694), obra esta publicada em Paris, em 1662, conhecida, também, por Logique de Port Roya. A concepção exposta pelos autores neste livro, conquanto desprovida de problemática inovadora e/ou profunda, obteve grande aceitação e passou a dominar o estudo da Lógica pela grande maioria dos filósofos durante os duzentos anos seguintes.

Afirme-se, como se poderia facilmente concluir, que os séculos XVII, XVIII e a metade do século XIX pouco ou quase nada contribuíram para o desenvolvimento da Lógica. Por outro lado, seria injusto deixar de comentar, neste resumo, o posicionamento assumido por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), o qual seria convenientemente considerado, tão-somente, no fim do século XIX.

Leibniz utilizou em diversos de seus trabalhos o que considerou chamar Calculus Ratiotinator ou Logica Mathematica. Muito embora, as ideias de Leibniz nunca tenham sido teorizadas por ele, seus trabalhos apresentam, evidentemente, a concepção da Lógica Matemática; sendo, por muitos estudiosos considerado o primeiro lógico matemático; entretanto, não pode ser considerado o fundador da Lógica Matemática; haja vista que muito de seus trabalhos foram publicados muito tempo depois de sua morte.

Na Lógica Matemática tem-se uma forma absolutamente inovadora de se tratar a Lógica; porquanto, enquanto as outras formas da Lógica teoremas lógicos eram simplesmente derivados da linguagem usual (ordinária), nesta nova forma tem-se a construção de uma linguagem artificial própria elaborada nas bases de um sistema puramente formal, encontrando na linguagem natural uma interpretação tão- somente após sua estruturação formal. Além de um tal fato, suas leis são formuladas em linguagem artificial a qual se assemelha, pela adoção de símbolos particulares, à linguagem da Matemática. As proposições da Lógica Matemática são formuladas assim em linguagem objeto. Mas, uma das características fundamentais de uma tal Lógica Matemática é o uso de um cálculo no sentido estrito da palavra. Como neste estudo não se pretende dizer, em verdade, o que vem a ser Lógica Matemática, mas sim posicioná-Ia no curso da história; informações de caráter sistêmico e/ou estrutural não serão apresentados. Contudo, pode-se sugerir a leitura dos textos Lógica Matemática: uma introdução ao Cálculo Propositiona/; Lógica Matemática: um sistema científico de raciocínio; Teoria da Argumentação e Análise Inferencial em Lógica Matemática; As leis lógicas do pensar coerente; e outros publicados pelo autor do presente texto.

Efetivamente, tem-se como o fundador da Lógica Matemática George Boole (1815-1864) que, com sua obra The Mathematical Analysis of Logic, publicada em 1847, dá início a um período revolucionário no desenvolvimento da Lógica.

Também em 1847, Augustus De Morgan (1806-1871) publicou o Formal Logic. Comparando as leis do pensamento com as leis da Álgebra, Boole publicou em 1854 sua obra fundamental denominada Investigation of the Laws of Thought.

A partir dos estudos de Boole muitos outros estudiosos enveredaram por caminhos semelhantes. Dentre eles merecem destaque os trabalhos de R. L. Ellis (em 1863), W. S. Jevons (em 1864), R. Grassmann (em 1872), J. Venn (em 1880, 1881), Hugh McColI (em 1877, 1878) e por E. Schroder (em1877). Diga-se, também, que entre 1891 e 1895, E. Schroder (1841-1902) publicou um dos maiores tratados de Lógica Matemática, o Vorlesungen über die Algebra der Logik. Entretanto, saliente- se, que os estudos de Schroder tiveram sua base nos ensaios de C. S. Pierce (1839-1914).

Em sua Investigation of the Laws of Thought de 1854 Boole explicou suas ideias de 1847 e fundamentou a Lógica Formal, apresentando, também, uma nova álgebra, a Álgebra de Boole ou a Álgebra da Lógica. De forma sumária, registre-se que a Álgebra

Booleana (B, +, .) constitui-se de um conjunto B de elementos x, y, z, ... (de classes) e de duas operações binárias, denominadas soma e produto lógico, designadas, respectivamente, por (+) e (.); tais que (x + y) indica a união de duas classes; enquanto que (x . y) corresponde à interseção de duas classes. No novo cálculo instituiu-se a relação de identidade representada pelo símbolo =. Ou seja, considerando-se o símbolo = entre os símbolos que designam duas classes quaisquer (x e y, por exemplo) está a indicar-se que as classes têm os mesmos membros e denota-se: x = y. Além do mais, os símbolos 1 e O passam a caracterizar as classes universal e nula.

Contudo, uma Álgebra de Boole difere da Álgebra Ordinária; senão considere. Se x denota uma classe, a interseção dessa classe com ela própria haverá, obviamente, de gerar a mesma classe x; ou seja: tem-se que x . x = x; o que pode ser generalizado para x. x. x. . x = x”= x, tornando a Álgebra da Lógica especial em relação à Álgebra Ordinária. E, partindo-se do mesmo universo conceitual, tem-se que x + x = x; uma vez que a soma lógica denota a união entre classes. Observe, a seu tempo, que em um tal sistema são possíveis as expressões: (1 . x) = x, (1 + x) = 1, (O . x) = °e (O + x) = x.

A Álgebra Booleana difere, também, da Álgebra Ordinária tendo em vista que (z . x) = (z . y), onde a classe z sendo distinta do conjunto vazio, não conduz à expressão x = y. Além do mais, se x . y = 0, tal fato não assegura que x ou y deve ser 0, como se pode claramente constatar tomando-se os princípios anteriores. Ao interpretar x + y como sendo a representação da união ou da soma lógica (num sentido inclusivo), das classes x e y, de forma que a classe x + y contém a classe x . y; tal particularidade traz vantagens consideráveis do ponto de vista formal, pois que permite afirmar a legitimidade da equação x + x = x e estabelecer todo o cálculo de acordo com o princípio da dualidade para a união e para a interseção.

Após as ideias de Boole (que pretendia qualificar a Lógica como uma parte da Matemática), surgem as concepções de Gottlob Frege (1848-1925), o qual tencionava mostrar que a Aritmética era idêntica à Lógica; sendo que em 1879 publicou seu Begriffsschrift, ensaio este que corresponde a um manual de ideografia ou escritura conceptual. Em 1884, Frege, lança seu Die Grund/agem der Arithemetic onde expõe, de forma informal, opiniões e críticas sobre as correntes sobre a natureza da Aritmética. Porém, em 1893, surge o primeiro volume de sua fundamental obra Die Grundgesetze der Arithmetik; sendo que o segundo volume somente seria publicado em 1903.

Nos trabalhos de Frege há de se assinalar a precisão com que diferencia variável de constante; a criação de sistemas lógicos tal qual o que hoje se conhece por Cálculo Proposicional, a concepção de função lógica, o conceito (fundamental) de quantificador, as distinções entre lei e regra (entre linguagem e metalinguagem) e a distinção entre as premissas nas quais se baseia um dado raciocínio e as regras de inferência.

Informe-se, em complementação às informações já apresentadas, que C. S. Peirce, Gottlob Frege eG. Peano (1858-1932) são os principais representantes da nova escola da Lógica Matemática, a qual vem surgir após G. Boole e que apresenta como meta principal a fundamentação das Matemáticas; tendo, a seu tempo, desenvolvido importantes métodos lógicos.

No século atual surge uma das obras fundamentais em Lógica Matemática publicada em três volumes entre 1910 e 1913; ou seja, os Principia Mathematica de B. Russell (1872-1970) e A. N. Whitehead (1861-1947). Nesta obra tem-se desenvolvido todos os possíveis detalhes quanto à prova de que a Matemática Pura pode ser estabelecida a partir de um número específico de princípios lógicos fundamentais; chegando-se a afirmar que a “Matemática é indistinguível da Lógica”.

Tomando-se algumas das ideias de Frege, a obra em questão promulga que a Matemática deveria ser apresentada como um sistema que se edifica a partir da Lógica. E, Russell afirma, com propriedade que “a Matemática é a juventude da Lógica e que a Lógica é a maturidade da Matemática”.

Das considerações acima e segundo Bochenski, a história da Lógica Matemática pode ser dividida, em sentido cronológico, em quatro fases fundamentais; quais sejam: I) – De Leibniz até 1847 com o The Mathematica/ Ana/ysis of Logic de Boole; 11) - De Boole até o Vor/esungen über die A/gebra der Logik de Schroder; 111) - Do Begriffsschrift (1879) de Frege até os Principia Matehematica de Russell e Whitehead; e, IV) - Dos Principia Mathematica (1910-1913) até os dias atuais.

Dada a excelência do trabalho de B. Russell e A. N. Whitehead, há de se afirmar que o grande avanço constatado nos dias atuais em Lógica se deve aos mesmos. Contudo, em termos gerais, ressalte-se que o período atual da Lógica apresenta-se desenvolvido em duas fases. A primeira, desenvolvida até 1930, estabelece a Metalógica; tendo como representantes principais D. Hilbert, Lowenhein e Skolem. A segunda, a partir de 1930 (aproximadamente), corresponde à formalização da Metalógica e tem por representantes principais A. Tarski, R. Carnap, K. Godel. Destacam-se, também, ostrabalhos de L. Brouwer, J. Lukasiewicz, St. Lesniewski, G. Gentzen, S. Jaskowski, A. Heyting, C. I. Lewis, e outros; todavia os estudos correspondentes não dizem respeito ao presente escopo.

Muito embora o posicionamento dicotômico de tempos passados esteja presente nos ensinamentos de inúmeros matemáticos e lógicos da atualidade, felizmente, a despeito desta aparente involução, se tem instaurado, em estudos admiráveis, a colaboração necessária entre a Matemática e a Lógica por inúmeros outros estudiosos destas áreas do conhecimento; os quais, não servindo- se de preconceitos e dogmatismos, promulgam a impregnação relacional de opiniões no sentido de caracterizar que a Lógica torna-se, em determinadas instâncias, mais Matemática e, a Matemática, por sua parte, cada vez mais Lógica.

Diversos pesquisadores, direta ou indiretamente, têm direcionado seus esforços no sentido de dissimular as barreiras ideológicas, diga-se, a bem da verdade, secionais, existentes entre a Matemática e a Lógica; uma vez que, tanto a Matemática quanto a Lógica, tratam de relações universais estabelecidas pela razão e não de realidades particulares advindas do "mundo real". Ressalte-se, contudo, que ambas as ciências não se prestam a afirmar ou a estudar, em seus universos relacionais, pertinências experimentais, mas sim, necessárias e formais, cujos sistemas axiomáticos são dotados, em grande parte, de uma impregnação mútua.

Não se pretende, alerte-se de imediato, com tal deliberação, homologar que a Matemática e a Lógica são "entidades" coincidentes. O que, por natural consequência, seria, sistemicamente, um absurdo conceitual. É lícito, todavia, conjeturar que a Matemática é condicionada pela Lógica; mas, tal condicionamento é interior em sua forma específica. Por outro prisma, a Lógica Formal, em essência, emerge de métodos matemáticos, embora na forma particular dos mesmos.

Partindo-se do pressuposto que não é concebível, tomando-se por base o atual estágio e desenvolvimento destas ciências, ignorar a amálgama de concepções heterogêneas que conduz, pelo caminho do sincretismo, a um núcleo comum. É claro, porém, que o presente resumo apresenta, apenas, uma contribuição preliminar inserida no cerne da tentativa maior de se estabelecer a evolução do que se considera chamar Lógica Matemática. Porquanto, seria, de todo, um descabido erro considerar esta compilação como pretendendo encerrar o que, não sem controvérsias, é usual denominar-se, na maioria das vezes, a ''fundamentação lógica'' da Matemática.

FONTE: Disponível em: <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/handle/1/423> Acesso em: 8 mar. 2015.

RESUMO DO TÓPICO 4

Neste tópico, você viu:

- Das regras básicas de inferência derivam outras cinco regras que nos auxiliam a simplificar as provas. O quadro a seguir apresenta um resumo das regras derivadas.

QUADRO RESUMO - REGRAS DERIVADAS

NOME	REGRA
SILOGISMO HIPOTÉTICO (SH)	$\varphi \to \Psi, \Psi \to \chi \vdash \varphi \to \Psi$
MODUS TOLLENS (MT)	$\varphi \to \Psi, {\sim}\Psi \vdash {\sim}\varphi$
CONTRADIÇÃO (CONTRAD)	$\varphi, {\sim}\varphi \vdash \Psi$
REPETIÇÃO (REP)	$\varphi \vdash \varphi$
SILOGISMO DISJUNTIVO (SD)	$\varphi \lor \Psi, {\sim}\varphi \vdash \Psi$
DILEMA CONSTRUTIVO (DC)	$\varphi \lor \Psi, \varphi \to \chi, \Psi \to \theta \vdash \chi \lor \theta$

FONTE: A autora

- Teoremas de equivalência do cálculo proposicional, que também podem ser usados em provas. Desta forma, é fundamental tê-los sempre em mãos, Veja a seguir o quadro resumo com as equivalências mais importantes.

QUADRO RESUMO - EQUIVALÊNCIAS

NOME	EQUIVALÊNCIA
Tautologia (TAUT)	$\varphi \lor \varphi \Leftrightarrow \varphi$
	$\varphi \,\&\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$
Comutativa (COM)	$\varphi \lor \Psi \Leftrightarrow \Psi \lor \varphi$
	$\varphi \,\&\, \Psi \Leftrightarrow \Psi \,\&\, \varphi$
Associativa (ASSOC)	$\varphi \lor (\Psi \lor \chi) \Leftrightarrow (\varphi \lor \Psi) \lor \chi$
	$\varphi \,\&\, (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \,\&\, \chi$
Distributiva (DIST)	$\varphi \,\&\, (\Psi \lor \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \lor (\varphi \,\&\, \chi)$
	$\varphi \lor (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \lor \Psi) \,\&\, (\varphi \lor \chi)$
Lei de Morgam (DM)	${\sim}(\varphi \,\&\, \Psi) \Leftrightarrow {\sim}\varphi \lor {\sim}\Psi$
	${\sim}(\varphi \lor \Psi) \Leftrightarrow {\sim}\varphi \,\&\, {\sim}\Psi$
Implic. Material (IM)	$\varphi \to \Psi \Leftrightarrow {\sim}\varphi \lor \Psi$
	${\sim}(\varphi \to \Psi) \Leftrightarrow \varphi \,\&\, {\sim}\Psi$
Dupla Negação (DN)	$\varphi \Leftrightarrow {\sim\sim}\varphi$

Transposição (TRAN)	$\varphi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow {\sim}\Psi \rightarrow {\sim}\varphi$
Exportação (EXP)	$(\varphi \;\&\; \Psi) \rightarrow \chi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \chi)$
Ambivalência (AMB)	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow {\sim}\varphi \leftrightarrow {\sim}\Psi$
	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow (\varphi \;\&\; \Psi) \vee ({\sim}\varphi \;\&\; {\sim}\Psi)$

FONTE: A autora

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico! Agora chegou a sua vez de colocar em prática as regras derivadas, os teoremas e as implicações estudadas neste tópico.

1 Prove (Use preferencialmente regras derivadas, quando possível).

a) $P \vee (Q \vee R), \sim P, \sim Q \vdash R$
b) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow \sim R \vdash \sim P$
c) $P \vee Q \vdash \sim P \rightarrow Q$
d) $P \vee Q, \sim P, \sim Q \vdash R$
e) $\sim P \vee Q \vdash \sim(P \,\&\, \sim Q)$
f) $P \vee Q, \sim R \rightarrow \sim P, Q \rightarrow S \vdash R \vee S$

2 Prove (Use teoremas e regras derivadas, quando possível).

a) $\sim P \vee Q, \sim Q \vee R \vdash P \rightarrow R$
b) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \,\&\, Q \vdash R$
c) $P \leftrightarrow Q, \sim (P \,\&\, Q) \vdash \sim (P \vee Q)$
d) $\sim(P \vee Q), \sim P \rightarrow R, \sim Q \rightarrow R \vdash R$
e) $\sim P \vee (Q \,\&\, R) \vdash (P \rightarrow Q) \,\&\, (P \rightarrow R)$
f) $\sim(P \,\&\, \sim Q), \sim P \rightarrow \sim R, R \vdash Q$
g) $\sim P \vee Q, \sim R \rightarrow \sim Q, P \vdash R$

UNIDADE 2

CÁLCULO PROPOSICIONAL

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Após o estudo desta unidade, você será capaz de:

- compreender os conceitos e definições do cálculo proposicional;
- construir tabelas-verdade usando os conectivos e suas tabelas específicas;
- identificar e diferenciar tautologia, contradição e contingência;
- verificar a existência ou não de equivalência lógica entre duas proposições;
- construir árvores de refutação e através delas, verificar a validade de argumentos e teoremas;
- reconhecer e identificar conceitos de lógica na teoria de conjuntos.

PLANO DE ESTUDOS

Nesta unidade de ensino, a abordagem da Lógica Matemática está dividida em três tópicos, nos quais se apresentam a construção de tabelas-verdades e árvores de refutação para a verificação da validade de argumentos e teoremas, bem como os conceitos da lógica na teoria dos conjuntos. Cada seção oferecerá subsídios que o auxiliarão na interiorização dos conteúdos e na resolução de problemas.

TÓPICO 1 – TABELAS-VERDADE

TÓPICO 2 – ÁRVORES DE REFUTAÇÃO

TÓPICO 3 – TEORIA DOS CONJUNTOS

TÓPICO 1

TABELAS-VERDADE

1 INTRODUÇÃO

Na unidade anterior tratamos a lógica proposicional do ponto de vista sintático, usando técnicas de inferência baseadas nas estruturas formais dos argumentos. Apesar de as formas de argumentos geradas por essas técnicas serem válidas de acordo com a interpretação pretendida dos operadores lógicos, pouco falamos acerca da validade ou invalidade dos argumentos. Desta forma, nesta unidade abordaremos dois testes sistemáticos, tabela-verdade e árvore de refutação, que interpretam os operadores da lógica proposicional, permitindo dar valor-verdade a um argumento.

O conceito central da semântica da lógica proposicional é o valor-verdade. O enunciado verdadeiro tem valor-verdade **V** e o enunciado falso tem o valor-verdade **F**, respectivamente, **verdadeiro** e **falso**.

A lógica matemática ou formal adota como regras fundamentais do pensamento os dois princípios que já estudamos na Unidade 1:

(i) Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
(ii) Princípio do terceiro excluído: toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos, e nunca um terceiro.

Devido a esses dois princípios, a lógica proposicional é dita bivalente, pois supõe que os únicos valores-verdade que toda proposição assume são verdadeiro e falso.

As tabelas-verdade, ou tabelas de valores de verdade, mostram o valor da verdade de uma proposição composta para cada combinação de valores de verdade que se pode atribuir aos seus componentes.

A seguir estudaremos como analisar o valor-verdade de uma proposição na forma de uma **tabela-verdade**.

2 LINHAS NA TABELA-VERDADE

Vamos pensar em uma proposição qualquer **P**, por exemplo: hoje é sábado. Segundo os princípios que acabamos de relembrar, esta proposição pode ser verdadeira ou falsa. Logo, hoje pode ser sábado (V) ou não (F). Podemos organizar esse pensamento em uma tabela, a qual chamamos de tabela-verdade.

	P
1	V
2	F

Agora, vamos pensar em uma proposição composta, P e Q, onde P representa "hoje é sábado" e Q "o dia está ensolarado". Perceba que hoje pode ser sábado (V) e pode estar um dia ensolarado (V), mas também pode ser que hoje seja sábado (V) e que não esteja ensolarado (F). Também pode ser que hoje não seja sábado (F) e que o dia esteja ensolarado (V). E, por fim, que hoje não seja sábado (F) e que o dia não esteja ensolarado (F). Representando isso na tabela-verdade, temos:

	P	Q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

O valor lógico de qualquer proposição composta é determinado pelos valores lógicos das proposições simples que a constituem e pela operação do conectivo envolvido.

Já em uma proposição composta por três proposições simples, teremos um número de possibilidades maior. Tomemos as proposições **P**, **Q** e **R**. Podemos ter: **P**, **Q** e **R** verdadeiros; **P** e **Q** verdadeiros e **R** falso; **P** verdadeiro, **Q** falso e **R** verdadeiro; **P** verdadeiro e **Q** e **R** falsos; **P** falso e **Q** e **R** verdadeiros; **P** falso, **Q** verdadeiro e **R** falso; **P** falso, **Q** falso e **R** verdadeiro e, por fim, **P**, **Q** e **R** falsos. Colocando estas informações em uma tabela, temos:

	P	Q	R
1	V	V	V
2	V	V	F
3	V	F	V
4	V	F	F
5	F	V	V
6	F	V	F
7	F	F	V
8	F	F	F

Observe que uma proposição simples gerou uma tabela composta por duas linhas. Duas proposições simples geraram uma tabela composta por quatro linhas (2x2 ou 2^2). E três proposições simples geraram uma tabela composta por oito linhas (2x2x2 ou 2^3). Assim, o número de linhas em uma tabela-verdade com n proposições simples é dado por 2^n linhas.

O número de linhas de uma tabela para representar uma proposição composta por quatro proposições simples será definido por $2^4 = 16$. Vejamos como ficam os valores lógicos:

	P	Q	R	S
1	V	V	V	V
2	V	V	V	F
3	V	V	F	V
4	V	V	F	F
5	V	F	V	V
6	V	F	V	F
7	V	F	F	V
8	V	F	F	F
9	F	V	V	V
10	F	V	V	F
11	F	V	F	V
12	F	V	F	F
13	F	F	V	V
14	F	F	V	F
15	F	F	F	V
16	F	F	F	F

Acadêmico, veja que na coluna da proposição P os valores lógicos V e F se repetem, consecutivamente, oito vezes cada um, enquanto que na coluna da proposição Q a cada quatro vezes, na proposição R a cada duas vezes e na proposição S a cada uma vez.

Volte nas tabelas anteriores e perceba esse padrão!

3 OPERAÇÕES LÓGICAS DAS PROPOSIÇÕES

A semântica de cada operador lógico também pode ser expressa na forma de tabela-verdade, onde os valores-verdade das proposições compostas que têm o operador lógico como seu operador principal são determinados através do valor lógico dos operandos a que se aplicam. A seguir, vamos analisá-los um a um.

3.1 NEGAÇÃO (~)

Dada uma proposição P, onde P: hoje é sábado. Podemos formar uma proposição negando P, ~P: não é verdade que hoje é sábado ou, simplesmente, hoje não é sábado.

Na tabela-verdade a negação inverte o valor-verdade da proposição, isto é, se **P** for verdadeiro, então **~P** será falso e se **P** for falso, então **~P** será verdadeiro. Veja:

	P	~P
1	V	F
2	F	V

3.2 CONJUNÇÃO (∧, &)

A conjunção de duas proposições simples, P ∧ Q, somente será verdadeira se P e Q forem ambas verdadeiras. Se uma das proposições (ou ambas) for falsa, a proposição composta P ∧ Q será considerada falsa.

Veja as possibilidades de formação:

1) As duas proposições serem verdadeiras.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

V ∧ V = V ⇒ É verdade que **P e Q** são verdadeiros.

2) A primeira proposição ser verdadeira e a segunda ser falsa.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

V ∧ F = F ⇒ Não é verdade que P e Q são verdadeiros.

3) A primeira proposição ser falsa e a segunda ser verdadeira.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

F ∧ V = F ⇒ Não é verdade que P e Q são verdadeiros.

4) Ambas as proposições serem falsas.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

F ∧ F = F ⇒ Não é verdade que P e Q são verdadeiros.

Veja na tabela-verdade como fica representada a proposição composta P ∧ Q.

	P	Q	P ∧ Q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

3.3 DISJUNÇÃO INCLUSIVA (∨)

A disjunção inclusiva de duas proposições **P** e **Q** é a proposição composta **P** ∨ **Q**, que é falsa quando os valores lógicos das proposições (**P**, **Q**) forem ambos falsos, e verdadeira nas demais possibilidades de valor-verdade. Vejamos os casos:

1) As duas proposições serem verdadeiras.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

V ∨ **V = V** ⇒ É verdade que **P ou Q** são verdadeiros.

2) A primeira proposição ser verdadeira e a segunda ser falsa.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

V ∨ **F = V** ⇒ É verdade que **P ou Q** são verdadeiros.

3) A primeira proposição ser falsa e a segunda ser verdadeira.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

F ∨ **V = V** ⇒ É verdade que **P ou Q** são verdadeiros.

4) Ambas as proposições serem falsas.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

F ∨ F = F ⇒ Não é verdade que **P ou Q** são verdadeiros.

Veja na tabela-verdade como fica representada a proposição composta P ∨ Q.

	P	Q	P ∨ Q
1	V	V	V
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

3.4 DISJUNÇÃO EXCLUSIVA ($\veebar$)

A disjunção exclusiva de duas proposições **P** e **Q** é a proposição composta **P** $\veebar$ **Q**, que é verdadeira quando os valores lógicos das proposições (**P**, **Q**) forem diferentes, e falsa quando **P** e **Q** forem ambas falsas ou ambas verdadeiras.

Lembre-se de que a disjunção exclusiva, como a própria denominação caracteriza, exclui uma das duas possibilidades: ou uma é verdade ou a outra é verdade, nunca as duas são verdadeiras ou falsas. Vejamos os casos:

1) As duas proposições serem verdadeiras.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

V $\veebar$ **V = F** ⇒ Não é verdade que **ou P é verdade ou Q** é verdade.

2) A primeira proposição ser verdadeira e a segunda ser falsa.

P: 2 é um número par. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

V $\veebar$ **F = V** ⇒ É verdade que **ou P** é verdade **ou Q** é verdade.

3) A primeira proposição ser falsa e a segunda ser verdadeira.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

F $\veebar$ **V = V** ⇒ É verdade que **ou P** é verdade **ou Q** é verdade.

4) Ambas as proposições serem falsas.

P: 2 é um número ímpar. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

F $\veebar$ **F = F** ⇒ Não é verdade que ou **P** é verdade ou **Q** é verdade.

Veja na tabela-verdade como fica representada a proposição composta $P \veebar Q$.

	P	Q	$P \veebar Q$
1	V	V	F
2	V	F	V
3	F	V	V
4	F	F	F

3.5 CONDICIONAL (→)

Vimos na Unidade 1 que quando duas proposições são conectadas com a palavra **se** antes da primeira inserção e da palavra **então** antes da segunda inserção, a proposição formada é condicional.

Estudamos também que, numa proposição condicional, a inserção que está entre o **se** e o **então** é chamada de antecedente e a inserção que está depois da palavra **então** é denominada consequente.

A proposição $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{Q}$ pode ser interpretada de duas maneiras:

(i) P é condição suficiente para Q.
(ii) Q é a condição necessária para P.

A condicional de duas proposições **P** e **Q** possui valor-verdade falso quando o antecedente é verdadeiro e a concedente é falsa, nos demais casos é sempre verdadeiro. Vejamos exemplos dos casos:

1) O antecedente e a concedente são verdadeiros.

P: Todo número par termina em 0, 2, 4, 6 e 8. (valor-verdade: V)
Q: 2 é um número par. (valor-verdade: V)

$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{V} \Rightarrow$ É verdade que, **se** **P** é verdade, **então** **Q** é verdade.

2) O antecedente é verdadeiro e a concedente é falsa.

P: Todo número par termina em 0, 2, 4, 6 e 8. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

$\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{F} \Rightarrow$ Não é verdade que **se** **P** é verdade, **então** **Q** é verdade.

3) O antecedente é falso e a consequente é verdadeira.

P: Todo número par termina em 1, 3, 5, 7 e 9. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

F $\rightarrow$ **V = V** $\Rightarrow$ É verdade que **se P** é falso, **então Q** é verdade.

4) O antecedente e a consequente são falsos.

P: Todo número par termina em 1, 3, 5, 7 e 9. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

F $\rightarrow$ **F = V** $\Rightarrow$ Não é verdade que **se P** é falso, então **Q** é falso.

A condicional P → Q não afirma que o consequente Q se deduz do antecedente P. Assim, no exemplo 3, onde inferimos o argumento "Se todo número par termina em 1, 3, 5, 7 e 9, então 3 é um número ímpar", não se está a afirmar que 3 é ímpar se deduz do fato de todo número par terminar em 1, 3, 5, 7 e 9. O que uma condicional afirma é unicamente uma relação entre os valores lógicos (V, F) do antecedente e consequente.

Veja na tabela-verdade como fica representada a proposição composta $P \rightarrow Q$.

	P	Q	$P \rightarrow Q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

3.6 BICONDICIONAL ($\leftrightarrow$)

Na unidade anterior também estudamos o bicondicional, proposição esta representada por **P se, e somente se, Q**, cujo valor lógico é verdade (V) quando **P** e **Q** são ambos verdadeiros ou ambos falsos e o valor lógico é falso (F) quando **P** e **Q** têm valores lógicos diferentes.

A proposição **P** $\leftrightarrow$ **Q** pode ser interpretada de duas maneiras:

(i) P é condição necessária e suficiente para Q.
(ii) Q é a condição necessária e suficiente para P.

Vejamos exemplos dos casos possíveis:

1) O antecedente e a consequente são verdadeiros.

P: Todo número par termina em 0, 2, 4, 6 e 8. (valor-verdade: V)
Q: 2 é um número par. (valor-verdade: V)

V $\leftrightarrow$ **V = V** $\Rightarrow$ É verdade que **P** é verdade **se, e somente se Q** é verdade.

2) O antecedente é verdadeiro e a consequente é falsa.

P: Todo número par termina em 0, 2, 4, 6 e 8. (valor-verdade: V)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

V $\leftrightarrow$ **F = F** $\Rightarrow$ Não é verdade que **P** é verdade **se, e somente se, Q** é verdade.

3) O antecedente é falso e a consequente é verdadeira.

P: Todo número par termina em 1, 3, 5, 7 e 9. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número ímpar. (valor-verdade: V)

F $\leftrightarrow$ **V = F** $\Rightarrow$ Não é verdade que **P** é falso **se, e somente se, Q** é verdade.

4) O antecedente e a consequente são falsos.

P: Todo número par termina em 1, 3, 5, 7 e 9. (valor-verdade: F)
Q: 3 é um número par. (valor-verdade: F)

F $\leftrightarrow$ **F = V** $\Rightarrow$ É verdade que **P** é falso se, e somente se **Q** é falso.

Veja na tabela-verdade como fica representada a proposição composta $P \rightarrow Q$.

	P	Q	$P \leftrightarrow Q$
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	V

Para verificar a validade de argumentos utilizando a tabela-verdade, você irá sempre consultar os valores-verdade de cada operador lógico. Para facilitar esta consulta, as reunimos em uma tabela única:

TABELA 1 - RESUMOS DOS VALORES LÓGICOS DOS CONECTIVOS

	P	Q	~P	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \veebar Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
1	V	V	F	V	V	F	V	V
2	V	F	F	F	V	V	F	F
3	F	V	V	F	V	V	V	F
4	F	F	V	F	F	F	V	V

FONTE: A autora

A ordem de resolução dos conectivos é: ~, , V, →, ↔, não havendo nenhum parêntese; quando houver parênteses, segue-se a mesma ordem dentro dos parênteses.

4 CONSTRUINDO TABELAS-VERDADE

Para construir uma tabela-verdade para uma fbf complexa, determinamos os valores-verdade para suas fbfs e então utilizamos as tabelas-verdade para os operadores lógicos, a fim de calcular os valores para as subfbfs cada vez maiores, até obtermos os valores para a fórmula toda.

Exemplo 1: Acompanhe a construção da tabela-verdade da fórmula: **~(P → ~Q)**.

Passo 1: Observar o número de proposições simples para calcular o número de linhas da tabela usando a fórmula 2^n, onde n é o número de proposições simples. Neste exemplo, n = 2, logo, o número de linhas será 4 ($2^2 = 4$).

Passo 2*:* Construir uma tabela com quatro linhas, inserindo as proposições simples e seus respectivos valores lógicos (V, F).

	P	Q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Passo 3*:* Inserimos uma quarta coluna, onde iremos escrever a negação de Q (~Q) e colocarmos seu valor-verdade. A negação troca o valor-verdade da proposição. Lembre-se de buscar os valores-verdade na tabela resumo.

	P	Q	~Q
1	V	V	F
2	V	F	V
3	F	V	F
4	F	F	V

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas a coluna **Q**.

Passo 4: Inserimos uma quinta coluna, onde vamos preencher com os valores verdade da proposição P → ~Q. A fórmula P → ~Q é uma condicional e possui valor-verdade falso (F) quando o antecedente é falso e o concedente é verdadeiro, nos demais casos é sempre verdadeiro (V).

	P	Q	~Q	P → ~Q
1	V	V	F	F
2	V	F	V	V
3	F	V	F	V
4	F	F	V	V

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas as colunas **P** e **~Q**.

Passo 5: Inserir uma sexta coluna, onde colocaremos os valores-verdade da fórmula ~(P → ~Q).

	P	Q	~Q	P → ~Q	**~(P → ~Q)**
1	V	V	F	F	**V**
2	V	F	V	V	**F**
3	F	V	F	V	**F**
4	F	F	V	V	**F**

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas a coluna **P → ~Q**.

A fórmula "~(P → ~Q)" é a negação de "P → ~Q", onde os valores de cada uma das quatro situações são os opostos daqueles relacionados sob o conectivo condicional. Escrevemos esses valores-verdade sob a negação inicial e esta última coluna indica os valores-verdade para a fórmula toda.

Exemplo 2: Acompanhe a construção da tabela-verdade da fórmula: **~P ∧ (P ∨ Q)**.

Passo 1: Novamente, iniciamos com o número de linhas. Já sabemos que, para duas proposições simples, a tabela terá quatro linhas.

Passo 2: Construir uma tabela com quatro linhas, inserindo as proposições simples e seus respectivos valores lógicos (V, F).

	P	Q
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Passo 3: Inserimos uma quarta coluna, onde iremos escrever a negação de P (~P) e colocarmos seu valor-verdade.

	P	Q	~P
1	V	V	F
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas a coluna **P**.

Passo 4: Inserimos uma quinta coluna, onde vamos preencher com os valores verdade da proposição $P \vee Q$. A disjunção inclusiva de duas proposições **P** e **Q** é falsa quando o valor lógico das proposições (**P**, **Q**) for falso de ambas, e verdadeira nas demais possibilidades de valor-verdade.

	P	Q	~P	$P \vee Q$
1	V	V	F	V
2	V	F	F	V
3	F	V	V	V
4	F	F	V	F

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas as colunas **P** e **Q**.

Passo 5: Inserir uma sexta coluna, onde colocaremos os valores-verdade da fórmula $\mathbf{\sim P \wedge (P \vee Q)}$. A conjunção de duas proposições simples, $P \wedge Q$, somente será verdadeira se P e Q forem ambas verdadeiras. Se uma das proposições (ou ambas) for falsa, a proposição composta $P \wedge Q$ será considerada falsa.

	P	Q	~P	$P \vee Q$	$\mathbf{\sim P \wedge (P \vee Q)}$
1	V	V	F	V	**F**
2	V	F	F	V	**F**
3	F	V	V	V	**V**
4	F	F	V	F	**F**

Para inferir estes valores-verdade, você deve considerar apenas as colunas **~P** e $\mathbf{P \vee Q}$.

Exemplo 3: Acompanhe a construção da tabela-verdade para a proposição:

(P ∨ Q) ∧ ~(P ∧ Q)

	P	Q	P ∨ Q	(P ∧ Q)	~(P ∧ Q)	**(P ∨ Q) ∧ ~(P ∧ Q)**
1	V	V	V	V	F	**F**
2	V	F	V	F	V	**V**
3	F	V	V	F	V	**V**
4	F	F	F	F	V	**F**

Atente que a coluna 7 é resultado do valor-verdade da conjunção entre as colunas 4 e 6.

Exemplo 4: Acompanhe a construção da tabela-verdade para a proposição:

P → (P → ~R) ↔ Q ∨ R.

Atente que esta tabela-verdade terá oito linhas, pois há três proposições simples (P, Q e R) e, $2^3 = 8$.

	P	Q	R	~R	P → ~R	P → (P → ~R)	Q ∨ R	**P → (P → ~R) ↔ Q ∨ R**
1	V	V	V	F	F	F	V	**F**
2	V	V	F	V	V	V	V	**V**
3	V	F	V	F	F	F	V	**F**
4	V	F	F	V	V	V	F	**F**
5	F	V	V	F	V	V	V	**V**
6	F	V	F	V	V	V	V	**V**
7	F	F	V	F	V	V	V	**V**
8	F	F	F	V	V	V	F	**F**

Exemplo 5: Veja a construção da tabela-verdade da fórmula bem formada:

((P ∧ Q) ∧ (R ∧ S)) → P

São quatro proposições simples que compõem essa fórmula, portanto, nossa tabela terá 16 linhas, $2^4 = 16$.

	P	Q	R	S	P ∧ Q	R ∧ S	(P ∧ Q) ∧ (R ∧ S)	**((P ∧ Q) ∧ (R ∧ S)) → P**
1	V	V	V	V	V	V	V	**V**
2	V	V	V	F	V	F	F	**V**
3	V	V	F	V	V	F	F	**V**
4	V	V	F	F	V	F	F	**V**
5	V	F	V	V	F	V	F	**V**
6	V	F	V	F	F	F	F	**V**
7	V	F	F	V	F	F	F	**V**
8	V	F	F	F	F	F	F	**V**
9	F	V	V	V	F	V	F	**V**
10	F	V	V	F	F	F	F	**V**
11	F	V	F	V	F	F	F	**V**
12	F	V	F	F	F	F	F	**V**
13	F	F	V	V	F	V	F	**V**
14	F	F	V	F	F	F	F	**V**
15	F	F	F	V	F	F	F	**V**
16	F	F	F	F	F	F	F	**V**

A seguir veremos que, dependendo dos valores-respostas contidos na coluna final, podemos classificar as fbfs em tautologia, inconsistência e equivalência.

5 TAUTOLOGIAS, INCONSISTÊNCIAS E CONTINGÊNCIAS

Qualquer fórmula cuja tabela-verdade contém somente F sob seu operador principal é denominada **inconsistente**. Fórmulas que apresentam, ao menos, um valor V e, ao menos, um valor F, são chamadas de **contingentes**. E se uma fórmula apresenta em sua tabela-verdade somente V sob seu operador principal, ela é chamada de **tautologia**.

Vejamos os exemplos:

Exemplo 1: P ∧ ~P

	P	~P	P ∧ ~P
1	V	F	F
2	F	V	F

A fórmula P ∧ ~P é inconsistente, pois a coluna de conclusão possui apenas valores lógicos falsos (F).

Exemplo 2: $P \lor \sim P$

	P	$\sim P$	$P \lor \sim P$
1	V	F	V
2	F	V	V

A fórmula $P \lor \sim P$ é uma tautologia, pois a coluna de conclusão possui apenas valores lógicos verdadeiros (V).

Todos os teoremas são tautologias, e vice-versa, pois, não havendo premissas, a conclusão (que é o próprio teorema) deverá ser sempre válida.

Exemplo 3: $P \rightarrow \sim P$

	P	$\sim P$	$P \rightarrow \sim P$
1	V	F	F
2	F	V	V

A fórmula $P \rightarrow \sim P$ é uma contingência, pois a coluna de conclusão possui apenas valores lógicos verdadeiros (V) e falsos (F).

Exemplo 4: $\sim(P \land \sim P)$ é tautológica, pois possui apenas valores verdadeiros.

	P	$\sim P$	$P \land \sim P$	$\sim(P \land \sim P)$
1	V	F	F	V
2	F	V	F	V

Exemplo 5: $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \lor Q)$ é tautológica, veja:

	P	Q	$\sim P$	$P \lor Q$	$\sim P \lor Q$	$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\sim P \lor Q)$
1	V	V	F	V	V	V
2	V	F	F	F	F	V
3	F	V	V	V	V	V
4	F	F	V	V	V	V

Exemplo 6: $P \leftrightarrow \sim P$ é uma contradição de acordo com a tabela-verdade (lembre-se de que, para o bicondicional ($\leftrightarrow$), o resultado é falso para valores lógicos diferentes de **p** e **~p**).

	P	$\sim P$	$P \leftrightarrow \sim P$
1	V	F	F
2	F	V	F

6 EQUIVALÊNCIAS

As equivalências podem também ser provadas utilizando tabelas-verdade. Veja como o processo é simples. Vamos construir a tabela-verdade da equivalência:

$$\mathbf{(P \land (Q \lor R)) \Leftrightarrow ((P \land Q) \lor (P \land R)).}$$

	P	Q	R	$Q \lor R$	$(P \land (Q \lor R))$	$(P \land Q)$	$(P \land R)$	$((P \land Q) \lor (P \land R))$	$(P \land (Q \lor R)) \Leftrightarrow ((P \land Q) \lor (P \land R))$
1	V	V	V	V	V	V	V	V	V
2	V	V	F	V	V	V	F	V	V
3	V	F	V	V	V	F	V	V	V
4	V	F	F	F	F	F	F	F	V
5	F	V	V	V	F	F	F	F	V
6	F	V	F	V	F	F	F	F	V
7	F	F	V	V	F	F	F	F	V
8	F	F	F	F	F	F	F	F	V

As duas fbfs equivalentes devem possuir colunas iguais. Assim, a equivalência recebe o valor lógico verdadeiro (V).

Todas as fbf que são tautologias são equivalentes entre si, assim como todas as inconsistências são também equivalentes entre si.

7 ANÁLISE DE ARGUMENTOS USANDO A TABELA-VERDADE

Uma forma de argumento é dita válida se, e somente se, todas as suas instâncias são válidas. Uma instância de uma forma é válida se é impossível que a conclusão seja falsa, enquanto suas premissas são verdadeiras. Uma tabela-verdade é, de fato, uma lista exaustiva de todas as possibilidades de todas as situações possíveis. Desta forma, quando colocamos em uma tabela-verdade todas as premissas e conclusão de um argumento, podemos determinar se aquela forma é ou não válida.

Para demonstrar ou verificar se um argumento é ou não válido, devemos proceder da seguinte maneira:

Dado um argumento: $P_1, P_2, \ldots, P_n \vdash C$

Passo 1) Constrói-se a tabela-verdade do argumento normalmente.

Passo 2) Identifica(m)-se a(s) coluna(s) das premissas (**P**) e da conclusão (**C**).

Passo 3) Analisa-se na(s) coluna(s) das premissas a(s) linha(s) que tiver(em) o valor-lógico (V) somente.

Passo 4) Em toda(s) a(s) linha(s) em que todas as premissas forem verdadeiras (V), a conclusão também é, então tem-se um argumento válido.

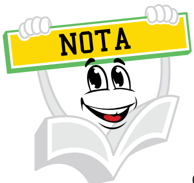
Passo 5) Se em apenas uma das linhas tivermos todas as premissas verdadeiras (**V**) e a conclusão falsa (**F**), então o argumento não é válido.

Exemplo 1: João é estudioso ou preguiçoso. Ele não é estudioso. Logo, ele é preguiçoso.

Fazendo:

P: João é estudioso.
~P: Ele não é estudioso.

Q: Ele é preguiçoso
Simbolicamente: $P \vee Q, \sim P \vdash Q$.



O símbolo ⊢ no argumento indica: *logo, portanto, consequentemente etc.*; o que vem depois é a conclusão.

Com estes dados, vamos construir a tabela-verdade:

	P	Q	P ∨ Q	~P	Q
1	V	V	V	F	V
2	V	F	V	F	F
3	F	V	**V**	**V**	**V**
4	F	F	F	V	F
			Premissa	Premissa	Conclusão

Premissas e conclusão verdadeiras. Logo, a forma é válida!

Para a forma de argumento ser válida é necessário que, sempre que todas as premissas forem simultaneamente verdadeiras, a conclusão também seja verdadeira. Neste caso, as premissas são simultaneamente verdadeiras apenas na linha 3 e a conclusão também é verdadeira. Logo, a forma é válida.

Exemplo 2: Se você está dançando na Lua, então você está vivo. Você está vivo. Logo, você está dançando na Lua.

Fazendo:

P: Se você está dançando na Lua.
Q: Você está vivo.
Simbolicamente: $P \rightarrow Q, Q \vdash P$.

Ao realizar a análise pela tabela-verdade, obteremos:

	P	Q	$P \rightarrow Q$	Q	P
1	V	V	V	V	V
2	V	F	F	F	V
3	F	V	V	V	F
4	F	F	V	F	F
			Premissa	Premissa	Conclusão

As premissas do argumento dado estão nas colunas 4 e 5, e a conclusão está na coluna 6. As premissas são ambas verdadeiras (**V**) na 1ª e 3ª linhas. Na linha 1, a conclusão também é verdadeira (**V**), mas na 3ª a conclusão é falsa (**F**). Logo, o argumento não é válido.

Veja o exemplo anterior escrito em uma ordem diferente.

Exemplo 3: Se você está dançando na Lua, então você está vivo. Você está dançando na Lua. Logo, você está vivo.

Fazendo:

P: Se você está dançando na Lua.
Q: Você está vivo.
Simbolicamente: $P \rightarrow Q, P \vdash Q$.

Ao realizar a análise pela tabela-verdade, obteremos:

	P	Q	$P \rightarrow Q$	P	Q
1	V	V	V	V	V
2	V	F	F	V	F
3	F	V	V	F	V
4	F	F	V	F	F
			Premissa	Premissa	Conclusão

Na 1ª linha, as premissas são ambas verdadeiras e nesta linha a conclusão também é verdadeira. Portanto, dizemos que o argumento é válido. Observe que, nas demais linhas, uma das premissas é falsa; estas linhas são sempre descartadas e são analisadas apenas as linhas em que todas as premissas são verdadeiras.

Exemplo 4: Se chove, o carro e a rua ficam molhados. Só o carro ficou molhado ou só a rua ficou molhada, portanto, não choveu. Conclusão: não choveu.

P: Choveu.
~P: Não choveu.
Q: O carro ficou molhado.
R: A rua ficou molhada.

Escrevendo o argumento de forma simbólica, temos: $P \rightarrow (P \wedge R), (Q \vee R) \rightarrow \sim P \vdash \sim P$.

	P	Q	R	~P	P ∧ R	Q ∨ R	P → (P ∧ R)	(Q ∨ R) → ~P	~P
1	V	V	V	F	V	V	V	F	F
2	V	V	F	F	F	V	F	F	F
3	V	F	V	F	F	V	F	F	F
4	V	F	F	F	F	F	F	V	F
5	F	V	V	V	V	V	V	V	V
6	F	V	F	V	F	V	V	V	V
7	F	F	V	V	F	V	V	V	V
8	F	F	F	V	F	F	V	V	V
							Premissa	Premissa	Conclusão

Observe que nas últimas quatro linhas todas as premissas são verdadeiras e a conclusão também é verdadeira. Portanto, o argumento é válido.

Exemplo 5: P → Q, Q → R ⊢ P → R.

	P	Q	R	P → Q	Q → R	P → R
1	V	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	V	F	V	F	F
3	V	F	V	F	V	V
4	V	F	F	F	V	F
5	F	V	V	**V**	**V**	**V**
6	F	V	F	V	F	V
7	F	F	V	**V**	**V**	**V**
8	F	F	F	**V**	**V**	**V**
				Premissa	Premissa	Conclusão

As premissas são todas verdadeiras (V) nas linhas 1, 5, 7 e 8. Também nestas linhas, a conclusão é verdadeira (V). Portanto, a forma de argumento é válida.

Exemplo 6: **P → Q, Q ⊢ P**.

	P	Q	P → Q	Q	P
1	V	V	**V**	**V**	**V**
2	V	F	F	F	V
3	F	V	**V**	**V**	**F**
4	F	F	V	F	F
			Premissa	Premissa	Conclusão

Existem duas situações nas quais as premissas são verdadeiras (V), nas linhas 1 e 3. Na linha 1, a conclusão também é verdadeira (V), mas na linha 3 ela é falsa (F). Assim, a forma é inválida, pois foi encontrada uma situação em que todas as premissas são verdadeiras, mas a conclusão é falsa.

As tabelas-verdade fornecem um teste rigoroso e completo para a validade ou invalidade de formas de um argumento da lógica proposicional. Elas constituem um algoritmo que sempre dá uma resposta após um número finito de operações. Quando num sistema formal existe um algoritmo que determina se as formas de argumentos possíveis de serem expressas são válidas ou não, esse sistema é dito **decidível**. Assim, as tabelas-verdade garantem a decidibilidade da lógica proposicional. Mas elas são ineficazes em problemas que envolvem muitas letras proposicionais, pois o número de linhas cresce na ordem 2^n. O processo de derivação de uma prova por meio de regra (conforme aprendemos na Unidade 1) evita esta explosão combinatória, mas é ineficaz para detectar argumentos inválidos. Ele apenas fornece provas de validade de argumentos.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você estudou que:

- Pelo princípio do terceiro excluído, toda proposição simples é verdadeira ou falsa, isto é, possui o valor-verdade ou valor lógico V (verdade) ou F (falso).

- O número de linhas em uma tabela é definido por 2^n, onde n é o número de proposições simples envolvidas na fórmula ou no argumento.

- Para construir uma tabela devemos seguir o passo a passo, descrito no item 4.

- Os valores lógicos dos conectivos são:

RESUMOS DOS VALORES LÓGICOS DOS CONECTIVOS

	P	Q	~P	$P \land Q$	$P \lor Q$	$P \veebar Q$	$P \to Q$	$P \to Q$
1	V	V	F	V	V	F	V	V
2	V	F	F	F	V	V	F	F
3	F	V	V	F	V	V	V	F
4	F	F	V	F	F	F	V	V

FONTE: A autora

- Qualquer fórmula cuja tabela-verdade contém somente F sob seu operador principal é denominada **inconsistente**. Fórmulas que apresentam ao menos um valor V e, ao menos, um valor F, são chamadas de **contingentes**. E se uma fórmula apresenta em sua tabela-verdade somente V sob seu operador principal, ela é chamada de **tautologia**.

- Uma forma de argumento é dita válida se, e somente se, todas as suas instâncias são válidas. Uma instância de uma forma é válida se é impossível que a conclusão seja falsa, enquanto suas premissas são verdadeiras.

AUTOATIVIDADE

1 Construa a tabela-verdade para cada uma das seguintes fórmulas bem formadas.

a) $(P \land \sim Q) \leftrightarrow (\sim R \underline{\lor} P)$
b) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$
c) $(P \land \sim Q) \rightarrow (\sim P \lor Q)$
d) $(P \rightarrow (\sim Q \land R)) \lor (P \leftrightarrow \sim R)$

2 Identifique, através de tabelas-verdade, se as seguintes proposições representam uma tautologia, contradição ou contingência.

a) $P \leftrightarrow \sim P$
b) $\sim(P \rightarrow \sim Q)$
c) $(P \land Q) \rightarrow (P \lor Q)$
d) $(P \land Q) \rightarrow (P \lor \sim Q)$
e) $(P \leftrightarrow \sim Q) \rightarrow (\sim P \land Q)$

3 Verifique se as seguintes equivalências são válidas, mediante o uso de tabelas-verdade.

a) $P \underline{\lor} Q \Leftrightarrow (P \lor Q) \land \sim(P \land Q)$
b) $P \underline{\lor} Q \Leftrightarrow (P \land \sim Q) \lor (\sim P \land Q)$
c) $\sim(P \land Q) \Leftrightarrow \sim P \land \sim Q$
d) $(P \land Q) \rightarrow R \Leftrightarrow P \rightarrow (Q \rightarrow R)$

4 Analise a validade ou invalidade dos argumentos a seguir, mediante o uso de tabelas-verdade.

a) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R, \sim R \vdash \sim P$
b) $(P \rightarrow Q) \land (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \land R)$
c) $Q \rightarrow P \vdash \sim P \underline{\lor} Q$
d) $P \lor \sim Q, R \rightarrow Q, \sim P \vdash \sim R$
e) $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \vdash R \rightarrow P$

ÁRVORES DE REFUTAÇÃO

1 INTRODUÇÃO

Vimos no tópico 1 que o uso de tabela-verdade nos fornece um teste rigoroso e completo para a validade ou invalidade de formas de um argumento da lógica proposicional, mas que são ineficazes em problemas que envolvem muitas letras proposicionais, pois o número de linhas cresce na ordem 2^n.

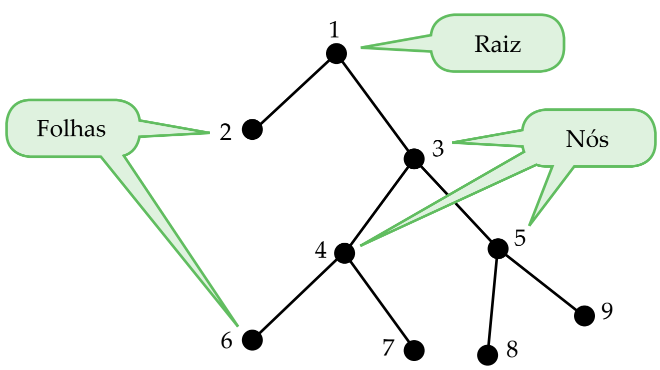
Desta forma, as árvores de refutação fornecem um algoritmo mais eficaz para verificar a validade ou a invalidade de argumentos comparados às tabelas-verdade. Elas constituem uma forma gráfica da forma normal disjuntiva de um argumento refutado.

Neste tópico estudaremos como se constituem as árvores de refutação, suas regras e como analisar a validade ou invalidade de argumentos através deste algoritmo.

2 CONSTRUINDO ÁRVORES DE REFUTAÇÃO

Em uma definição mais formal, uma árvore é um conjunto de nós ou vértices ligados por arestas ou ramos, conforme podemos verificar na figura a seguir. Os nós estão rotulados por números inteiros, e os nós finais são denominados de folhas (na figura: 2, 6, 7, 8 e 9).

FIGURA 1 - COMPOSIÇÃO DE UMA ÁRVORE



FONTE: A autora

Já uma árvore de refutação é uma árvore na qual os vértices internos representam proposições, as arestas representam os valores lógicos de uma proposição e as folhas representam os resultados finais e que servem para determinar a validade de uma fórmula (ou proposição) a partir da estrutura de dados do tipo árvore.

Para testar a validade de uma forma de argumento utilizando uma árvore de refutação, constrói-se uma lista consistindo em suas premissas e na negação de sua conclusão. Depois, desmembramos as fbfs da lista em letras proposicionais ou sua negação. Se encontrarmos atribuições de verdade e falsidade para as letras proposicionais que tornem verdadeiras todas as fbfs da lista, então as premissas são verdadeiras, enquanto sua conclusão é falsa, neste caso, refutamos a forma de argumento, pois ela é inválida. Se na busca não surgir atribuição de verdade e falsidade para as letras proposicionais que tornem verdadeiras todas as fbfs da lista, então a refutação é falha, ou seja, a forma de argumento é válida.

Para compreender melhor, acompanhe o processo do algoritmo para a seguinte forma de argumento:

$$\mathbf{P \land Q \vdash {\sim}{\sim}P}$$

Passo 1: Liste a(s) premissa(s).

$$P \land Q$$

Passo 2: Abaixo da(s) premissa(s), liste a negação da conclusão.

$$\left.\begin{array}{c} P \land Q \\ {\sim}{\sim}{\sim}P \end{array}\right\} \text{(raiz da árvore)}$$

Passo 3: A desmembração da raiz consiste em escolher uma das fórmulas e substituir quando possível por sua razão lógica. Neste exemplo começaremos pela premissa, mas poderíamos começar pela conclusão. A premissa é verdadeira se, e somente se, **P** e **Q** forem verdadeiras (conforme estudamos no tópico 1 desta unidade, item 3.2). Então, podemos substituir **P ∧ Q** por essas duas letras proposicionais. Mostraremos isso **empilhando** (uma em cima da outra) **P** e **Q** no final da lista e ticamos (✓) a fórmula **P ∧ Q** para indicar que a eliminamos. **Uma fórmula ticada está eliminada da lista**.

$$\begin{array}{lcl} & \checkmark\ P \land Q & \\ & {\sim}{\sim}{\sim}P & \text{substituição} \\ \text{empilhamento} \rightarrow & \boxed{\begin{array}{c} P \\ Q \end{array}} & \end{array}$$

Passo 4: **$\sim\sim\sim P$** é verdadeira se, e somente se, **$\sim P$** é verdadeira (dupla negação). Portanto, podemos ticar **$\sim\sim\sim P$** e substituí-la por **$\sim P$**.

$\checkmark$ P ∧ Q
$\checkmark$ ~~~P
P
Q substituição
~P

Passo 5: "A árvore terminou de crescer", pois todas as fórmulas foram desmembradas em uma lista de letras proposicionais ou de suas negações, as quais devem ser verdadeiras se todos os membros da lista original são verdadeiros. Um galho para de desmembrar quando encontramos acima dele sua proposição contrária, ou quando não temos mais fórmulas para ticar. Neste exemplo, entre as letras proposicionais e suas negações, temos **~P** e acima dele **P**, as quais não podem ser ambas verdadeiras. Logo, é impossível que todas as fórmulas desta última lista sejam verdadeiras. Expressamos isso escrevendo um **X** no final da lista, indicando que o galho não crescerá mais.

$\checkmark$ P ∧ Q
$\checkmark$ ~~~P
P
Q proposição contrária
~P
X → fechamento do galho

Assim, a árvore de refutação está completa e nossa busca por uma refutação da forma de argumento falhou. Portanto, essa forma é válida.

IMPORTANTE

Acadêmico, perceba que, quando negamos a conclusão, estamos refutando o argumento. Assim, quando entre as letras proposicionais e suas negações temos apenas verdade, isso indica que nossa refutação está correta, ou seja, a negação da conclusão é verdadeira e, portanto, o argumento é inválido. Agora, se tivermos entre as letras proposicionais e suas negações verdades e falsidade, então nosso esforço em refutar a conclusão falhou e o argumento é válido.

Exemplo 2: Construção da árvore de refutação para o argumento de forma:

P ∨ Q, ~P ⊢ Q

Passo 1: Liste a(s) premissa(s).

$$P \lor Q$$
$$\sim P$$

Passo 2: Abaixo da(s) premissa(s), liste a negação da conclusão.

$$P \lor Q$$
$$\sim P$$
$$\sim Q$$

Passo 3: Como **~P** e **~Q** são negações de letras proposicionais, elas não podem ser analisadas além disso. Mas, **P** ⋁ **Q** é verdadeira se, e somente se, **P** ou **Q** é verdadeira. Para representar o fato de que **P** ⋁ **Q** pode ser verdadeira em qualquer um desses dois casos, nós ticamos **P** ⋁ **Q** e bifurcamos a árvore, do seguinte modo:

✓ $P \lor Q$
$\sim P$
$\sim Q$
$P \qquad Q$

Passo 4: A árvore, agora, contém dois ramos, cada um iniciando com a fórmula ticada **P** ⋁ **Q**. O primeiro ramifica-se para a esquerda e termina com **P** e o segundo ramifica-se para a direita e termina com **Q**. As três fórmulas da lista inicial podem ser verdadeiras se, e somente se, todas as fórmulas de um dos ramos forem verdadeiras também. Analisando o primeiro ramo, temos **P** e acima dele **~P** e, no segundo, temos **Q** e acima dele **~Q**. Como no exemplo 1, indicamos isso terminando cada ramos com um **X**.

✓ $P \lor Q$
$\sim P$
$\sim Q$
$P \qquad Q$
$X \qquad X$

Desta forma, a árvore está completa e a refutação falhou nos dois ramos. Portando, o argumento é válido.

Exemplo 3: Construção da árvore de refutação para determinar se a forma de argumento a seguir é válida:

$$\mathbf{P \lor Q, P \vdash \sim Q}$$

Vamos listar as premissas e a negação da conclusão.

P V Q
P
~~Q

~~Q é equivalente a Q, assim ticamos ~~Q e escrevemos Q no final da lista.

P V Q
P
✓ ~~Q
Q

Como no exemplo 2, ticamos P V Q e mostramos suas possibilidades de verdade e bifurcamos a árvore.

✓ P V Q
P
✓ ~~Q
Q

P   Q

A árvore está completa, visto que todas as fórmulas foram desmembradas em letras proposicionais ou em suas negações. Como não há nenhuma contradição, todas as três fórmulas originais são verdadeiras, inclusive a negação da conclusão. Portanto, esta forma de argumento é inválida.

Acadêmico, você pode confirmar o resultado destes três exemplos construindo tabelas-verdade para as respectivas formas de argumento.

A seguir, vamos sistematizar a ação que devemos ter em cada um dos conectivos proposicionais.

3 CONECTIVOS PROPOSICIONAIS NAS ÁRVORES DE REFUTAÇÃO

Vimos que uma árvore de refutação é uma análise na qual uma lista de enunciados é desmembrada em letras proposicionais ou em suas negações, que mostram as condições nas quais os membros da lista inicial podem ser verdadeiros. E as condições para que um enunciado possa ser verdadeiro dependem dos operadores lógicos que ele contém, ou seja, dos conectivos proposicionais. Cada operador lógico possui uma forma diferente de ser desmembrado e são essas formas que veremos agora.

Para explicar como se comporta cada um dos dez operadores lógicos (negação, conjunção, disjunção, condicional, bicondicional, bem como a negação de cada um deles), inicialmente, precisamos definir o conceito de ramo aberto e fechado. Um **ramo aberto** é aquele que não termina com um **X** (como no exemplo 3); já os ramos que terminam com um **X** são denominados de **ramos fechados**.

3.1 NEGAÇÃO (~)

Se um ramo aberto contém uma fórmula e sua negação, colocamos um X no final do ramo.

A ideia é que qualquer ramo que contém uma fórmula e sua negação não é um ramo em que todas as fórmulas podem ser verdadeiras, que é o objetivo ao se construir uma árvore de refutação. Desta forma, podemos fechar esse ramo como uma tentativa falha de refutação.

$$\begin{array}{c} \varphi \\ \sim\varphi \\ \chi \end{array}$$

Lembre-se de que as letras gregas simbolizam uma fbf qualquer.

3.2 NEGAÇÃO NEGADA OU DUPLA NEGAÇÃO (~~)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma $\sim\sim\varphi$, ticamos $\sim\sim\varphi$ e escrevemos φ no final de cada ramo aberto que contém $\sim\sim\varphi$ ticada.

$$\checkmark \sim\sim\varphi$$
$$\varphi$$

3.3 CONJUNÇÃO (∧, &)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma $\varphi \wedge \Psi$, ticamos $\varphi \wedge \Psi$ e escrevemos φ e Ψ no final de cada ramo aberto que contém $\varphi \wedge \Psi$ ticada.

$$\checkmark\ \varphi \wedge \Psi$$
$$\varphi$$
$$\Psi$$

3.4 CONJUNÇÃO NEGADA (~∧, ~&)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma $\sim(\varphi \wedge \Psi)$, ticamos $\sim(\varphi \wedge \Psi)$ e bifurcamos o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\varphi \wedge \Psi)$ ticada, onde no final do primeiro ramo escrevemos $\sim\varphi$ e no final do segundo ramo escrevemos $\sim\Psi$.

$$\checkmark \sim(\varphi \wedge \Psi)$$
$$\sim\varphi \qquad \sim\Psi$$

3.5 DISJUNÇÃO (∨)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma $(\varphi \vee \Psi)$, ticamos $(\varphi \vee \Psi)$ e bifurcamos o final de cada ramo aberto que contém $(\varphi \vee \Psi)$ ticada, onde no final do primeiro ramo escrevemos φ e no final do segundo ramo escrevemos Ψ.

$$\checkmark\ (\varphi \vee \Psi)$$
$$\varphi \qquad \Psi$$

3.6 DISJUNÇÃO NEGADA (~ V)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma ~($\varphi \vee \Psi$), ticamos ~($\varphi \vee \Psi$) e escrevemos ~φ e ~Ψ no final de cada ramo aberto que contém ~($\varphi \vee \Psi$).

$$\begin{array}{c} \checkmark\ {\sim}(\varphi \vee \Psi) \\ {\sim}\varphi \\ {\sim}\Psi \end{array}$$

3.7 CONDICIONAL (→)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma ($\varphi \to \Psi$), ticamos ($\varphi \to \Psi$) e bifurcamos o final de cada ramo aberto que contém ($\varphi \to \Psi$) ticada, onde no final do primeiro ramo escrevemos ~φ e no final do segundo ramo escrevemos Ψ.

$$\begin{array}{c} \checkmark\ (\varphi \to \Psi) \\ \swarrow \qquad \searrow \\ {\sim}\varphi \qquad\quad \Psi \end{array}$$

3.8 CONDICIONAL NEGADO (~ →)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma ~($\varphi \to \Psi$), ticamos ~($\varphi \to \Psi$) e escrevemos φ e ~Ψ no final de cada ramo aberto que contém ~($\varphi \to \Psi$) ticada.

$$\begin{array}{c} \checkmark\ {\sim}(\varphi \to \Psi) \\ \varphi \\ {\sim}\Psi \end{array}$$

3.9 BICONDICIONAL (↔)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma ($\varphi \leftrightarrow \Psi$), ticamos ($\varphi \leftrightarrow \Psi$) e bifurcamos o final de cada ramo aberto que contém ($\varphi \leftrightarrow \Psi$) ticada, onde no final do primeiro ramo escrevemos φ e Ψ e, no final do segundo ramo escrevemos ~φ e ~Ψ.

$$\begin{array}{c} (\varphi \leftrightarrow \Psi) \\ \swarrow \qquad \searrow \\ \begin{array}{cc} \varphi & {\sim}\varphi \\ \Psi & {\sim}\Psi \end{array} \end{array}$$

3.10 BICONDICIONAL NEGADO (~ ↔)

Se um ramo aberto contém uma fbf não ticada da forma $\sim(\varphi \leftrightarrow \Psi)$, ticamos $\sim(\varphi \leftrightarrow \Psi)$ e bifurcamos o final de cada ramo aberto que contém $\sim(\varphi \leftrightarrow \Psi)$ ticada, onde no final do primeiro ramo escrevemos φ e $\sim\Psi$ e, no final do segundo ramo escrevemos $\sim\varphi$ e Ψ.

$$
\begin{array}{ccc}
 & \checkmark \sim(\varphi \leftrightarrow \Psi) & \\
\swarrow & & \searrow \\
\varphi & & \sim\varphi \\
\sim\Psi & & \Psi
\end{array}
$$

Um ramo termina se ele se fecha ou se as fbfs não ticadas que ele contém são letras proposicionais ou suas negações, tal que nenhuma regra se aplica às suas fórmulas. Assim, uma árvore está completa se todos os seus ramos terminam. Quando uma árvore termina, podemos avaliar a validade ou invalidade da forma de argumento. Um argumento é válido quando todos os ramos de uma árvore completa estão fechados; e a forma de argumento é inválida quando algum ramo de uma árvore completa estiver aberto.

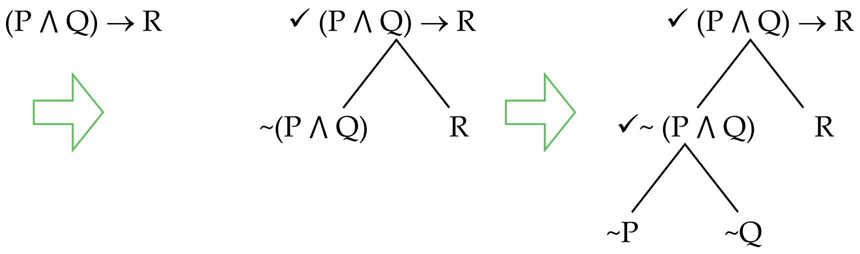
4 EXEMPLOS

Preparamos vários exemplos para você acompanhar a construção das árvores de refutação de algumas proposições e de formas de argumento, as quais envolvem os operadores lógicos estudados. Estes exemplos irão lhe auxiliar no momento das autoatividades.

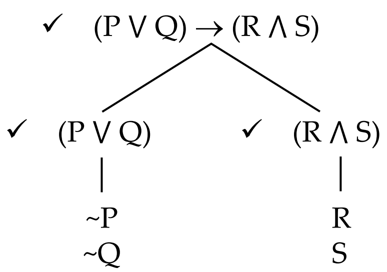
Exemplo 1: $(P \land Q) \rightarrow R$

Uma árvore permite uma representação gráfica que resulta numa forma normal disjuntiva de uma fbf. Em sua raiz, colocamos a fbf. Na medida em que as formas equivalentes disjuntivas são construídas, para baixo, por utilizar as equivalências do quadro acima, ticamos (símbolo ✓) a fbf que é substituída. Quando encontrar uma disjunção $\varphi \lor \Psi$, ramifica-se, colocando a parte φ para a esquerda e a parte Ψ para a direita. Tica-se a conjunção. Para as conjunções $\varphi \land \Psi$, coloca-se φ e, imediatamente abaixo, Ψ. Tica-se a conjunção. Permanecem sem a marca ✓ apenas as letras sentenciais e suas negações. A morfologia da árvore, ao final, indica claramente onde ocorrem as conjunções e as disjunções.

O exemplo acima conduz à seguinte construção, vista em três etapas.



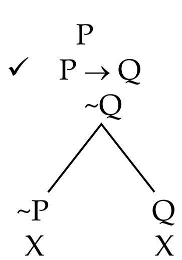
Exemplo 2: **(P ∨ Q) → (R ∧ S)**



Cada termo da fbf correspondente gera uma ramificação de extremo distinto. Na ramificação à esquerda permanecem, na extremidade, ~P e ~Q, correspondentes ao termo (~P ∧ ~Q). À direita permanecem R e S, correspondentes ao termo (R ∧ S).

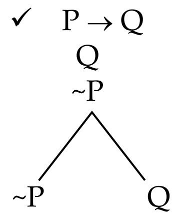
Se há várias possibilidades de ticar expressões, num determinado momento, a ordem não importa. Porém, a forma equivalente será agregada ao final da subárvore que possui a expressão a ser ticada como raiz. Se há ramificações, cada uma delas deverá receber a forma equivalente, como consequência da distributividade da disjunção.

Exemplo 3: **P, P → Q ⊢ Q**

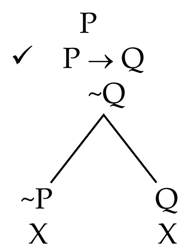


O ramo acima contém P, ~Q e ~P, correspondente à conjunção P ∧ ~P ∧ ~Q. O da direita contém P, ~Q e Q, correspondente à P ∧ Q ∧ ~Q. Os dois ramos fecham. A forma de argumento é válida.

Exemplo 4: **P → Q, Q ⊦ P**

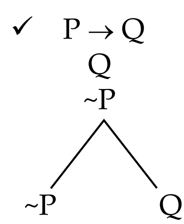


Nenhum ramo fecha. Assim, a forma é inválida.



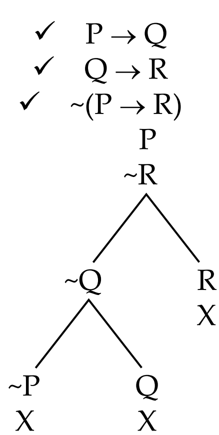
O ramo acima contém P, ~Q e ~P, correspondente à conjunção P ∧ ~P ∧ ~Q. O da direita contém P, ~Q e Q, correspondente à P ∧ Q ∧ ~Q. Os dois ramos fecham. A forma de argumento é válida.

Exemplo 4: P → Q, Q ⊦ P



Nenhum ramo fecha. Assim, a forma é inválida.

Exemplo 5: P → Q, Q → R ⊦ P → R



Todos os ramos fecham. Logo, a forma é válida.

Exemplo 6: $(P \land Q) \rightarrow R, P \vdash R$

```
        ✓  (P ∧ Q) → R
               P
              ~R
             /   \
  ✓~ (P ∧ Q)       R
      /   \        X
    ~P     ~Q
     X
```

A forma é inválida, pois um ramo não fecha.

Exemplo 7: $\sim(P \land Q) \vdash P \leftrightarrow \sim Q$

```
        ✓ ~(P ∧ Q)
       ✓ ~(P ↔ ~Q)
          /      \
       ~P          P
       ~Q         ✓~~Q
      /   \          Q
    ~P     ~Q      /   \
                 ~P     ~Q
                  X      X
```

Forma é inválida, pois dois ramos não fecham.

Note que no desenvolvimento desta árvore que a primeira ticada está acontecendo na bicondicional negado, seguido da negação dupla e por fim na conjunção negada. Esta última, bifurca tanto no ~Q quanto no Q, pois ambos galhos continuavam abertos.

Exemplo 8: P → Q ⊦ P ∨ Q

✓ P → Q
✓ ~(P ∨ Q)
~P
~Q

~P Q
X

Forma é inválida, pois um ramo não fecha.

Exemplo 9: ~P → ~Q ⊦ P → Q

✓ ~P → ~Q
✓ ~(P → Q)
P
~Q

✓ ~~P ~Q
P

A árvore tem dois ramos abertos, cada qual indicando que a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa, quando P é verdadeira e Q é falsa. Portanto, a forma é inválida.

Exemplo 10: P, P → Q ⊦ P ↔ Q

P
✓ P → Q
✓ ~(P ↔ Q)

~P Q
X

P ~P
~Q Q
X X

A forma é válida, pois a árvore completa está fechada.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico estudamos o método de análise de argumento denominado árvore de refutação e destacamos:

- Um **ramo aberto** é aquele que não termina com um **X**. Já os ramos que terminam com um **X** são denominados de **ramos fechados**.

- Um ramo termina se ele se fecha ou se as fbfs não ticadas que ele contém são letras proposicionais ou suas negações, tal que nenhuma regra se aplica às suas fórmulas. Assim, uma árvore está completa se todos os seus ramos terminam.

- Quando uma árvore termina, podemos avaliar a validade ou invalidade da forma de argumento. Um argumento é **válido** quando todos os ramos de uma árvore completa estão fechados. E a forma de argumento é **inválida** quando algum ramo de uma árvore completa estiver aberto.

- Quando aparecerem os seguintes operadores lógicos, substituir pela forma indicada em cada um deles:

OPERADOR LÓGICO	FÓRMULA	REGRA	EXEMPLO
NEGAÇÃO NEGADA OU DUPLA NEGAÇÃO	$\sim\sim\varphi$	EMPILHA	$\sim\sim\varphi$ φ
CONJUNÇÃO	$\varphi \land \Psi$ ou $\varphi \,\&\, \Psi$	EMPILHA	$\varphi \land \Psi$ φ Ψ
CONJUNÇÃO NEGADA	$\sim(\varphi \land \Psi)$ ou $\sim(\varphi \,\&\, \Psi)$	BIFURCA	$\sim(\varphi \land \Psi)$ $\sim\varphi \qquad \sim\Psi$
DISJUNÇÃO	$\varphi \lor \Psi$	BIFURCA	$\varphi \lor \Psi$ $\varphi \qquad \Psi$
DISJUNÇÃO NEGADA	$\sim(\varphi \lor \Psi)$	EMPILHA	$\sim(\varphi \lor \Psi)$ $\sim\varphi$ $\sim\varphi$
CONDICIONAL	$\varphi \rightarrow \Psi$	BIFURCA	$\varphi \rightarrow \Psi$ $\sim\varphi \qquad \Psi$
CONDICIONAL NEGADA	$\sim(\varphi \rightarrow \Psi)$	EMPILHA	$\sim(\varphi \rightarrow \Psi)$ φ $\sim\Psi$

BICONDICIONAL	$\varphi \leftrightarrow \Psi$	EMPILHA BIFURCA	$\varphi \leftrightarrow \Psi$ φ $\quad$ $\sim\varphi$ Ψ $\quad$ $\sim\Psi$
BICONDICIONAL NEGADO	$\sim(\varphi \leftrightarrow \Psi)$	EMPILHA BIFURCA	$\sim(\varphi \leftrightarrow \Psi)$ $\sim\varphi$ $\quad$ φ Ψ $\quad$ $\sim\Psi$

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico, chegou o momento de praticar seus conhecimentos adquiridos neste tópico. Utilize o resumo e os exemplos para construir as árvores de refutação e para julgar a validade ou invalidade dos seguintes argumentos:

1. $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R,\ {\sim}R \vdash {\sim}P$

2. $(P \rightarrow Q) \lor (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \land R)$

3. $P \rightarrow Q \vdash {\sim}P \lor Q$

4. $P \lor {\sim}Q,\ R \rightarrow Q,\ {\sim}P \vdash {\sim}R$

5. $P \rightarrow Q,\ Q \rightarrow R \vdash R \rightarrow P$

6. $(P \lor Q) \rightarrow {\sim}R \vdash R \rightarrow (P \lor {\sim}Q)$

7. $P \lor (Q \lor R),\ {\sim}P,\ {\sim}Q \vdash R$

8. $P \rightarrow Q,\ P \lor {\sim}Q \vdash {\sim}(Q \land R)$

9. $(I \land C) \rightarrow {\sim}S,\ {\sim}S \rightarrow {\sim}A \vdash C \rightarrow {\sim}A$

10. $P \leftrightarrow (Q \land R) \vdash Q \rightarrow P$

TÓPICO 3

TEORIA DOS CONJUNTOS

1 INTRODUÇÃO

Teoria dos conjuntos é o ramo da matemática dedicada ao estudo da associação entre objetos com uma mesma propriedade. Sua origem pode ser encontrada nos trabalhos do matemático russo Georg Cantor (1845-1918).

A teoria dos conjuntos também ficou conhecida como "teoria ingênua" ou "teoria intuitiva", por causa da descoberta de vários paradoxos associados à ideia central da própria teoria, influenciando de modo permanente as ciências da matemática e da lógica.

Neste tópico iremos rever alguns conceitos básicos da teoria dos conjuntos e, posteriormente, estudaremos de que forma a teoria dos conjuntos e a lógica estão associadas.

2 CONJUNTO E ELEMENTO

Um **conjunto** é uma coleção de elementos distintos que o identificam. Para indicar se um elemento faz parte ou não de um determinado conjunto, usamos os símbolos $\in$ (pertence) e $\notin$ (não pertence). Veja os exemplos a seguir:

a) Seja A = {1, 3, 5, 7, 9} o conjunto dos números naturais ímpares menores que 10. O número 9 é um elemento do conjunto A. Indica-se por $9 \in A$. Lê-se: nove pertence ao conjunto A.

b) Seja B = { {2}, {4}, {5}, {6} } um conjunto formado por elementos que são conjuntos. Veja que {2} é elemento de B e indicamos $\{2\} \in B$. Por sua vez, o número 5 não é elemento de B e indicamos: $5 \notin B$.

c) Seja C = {3, {4}, {1, 2}, 5, 7} um conjunto formado por cinco elementos. Indicamos neste exemplo $3 \in C$ e $\{3\} \notin C$, pois 3 é elemento de C e {3} não é elemento de C. Assim, de modo análogo temos: $4 \notin C$ e $\{4\} \in C$.

3 REPRESENTAÇÃO DOS CONJUNTOS

Um conjunto pode ser representado de várias maneiras. Considerando o conjunto **D** dos números naturais menores que seis, podemos representá-lo:

1º) Explicitando ou enumerando os seus elementos. Exemplo:

D = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

2º) Usando a notação de conjunto, propriedade característica de todos os seus elementos. Exemplo:

D = {x / x é natural menor que 6}
D = $\{x \,/\, x \in \mathbf{N} \wedge x < 6\}$

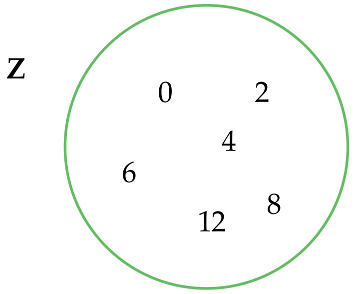
3º) Usando a linguagem coloquial. Exemplo:

D é o conjunto dos números naturais menores que seis.

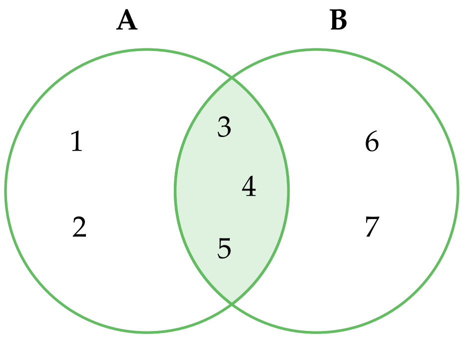
4º) Diagrama de Venn.

A utilização do Diagrama de Venn forma um teste rápido e eficaz para validar as formas de silogismos categóricos.

O Diagrama de Venn é um método que consiste na representação das relações entre conjuntos numéricos por meio de círculos. Por exemplo: representar no Diagrama de Venn o conjunto **Z** = {0, 2, 4, 6, 8, 12}.



No exemplo seguinte, veja como fica a representação no Diagrama de Venn dos conjuntos **A** = {1, 2, 3, 4, 5} e **B** = {3, 4, 5, 6, 7}, onde existe uma intersecção entre os conjuntos **A** e **B** (a intersecção é a área pintada).



Os diagramas de Venn foram criados pelo matemático inglês John Venn.

4 TIPOLOGIA

Um conjunto pode ser definido em:

a) Finito: quando possui um número finito de elementos.

<u>Exemplo:</u> **A** = {dias da semana}
A = {segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado, domingo}

b) Infinito: quando possui um número infinito de elementos.

<u>Exemplo:</u> **B** = {números naturais maiores que onze}
B = {12, 13, 14, ...}

c) Unitário: quando possui apenas um elemento.

<u>Exemplo:</u> **C** = {satélite natural da Terra}
C = {Lua}

d) Vazio: quando não possui elemento algum.

<u>Exemplo:</u> **D** = {mês do ano que possui 32 dias}
D = { } ou,
D = $\varnothing$

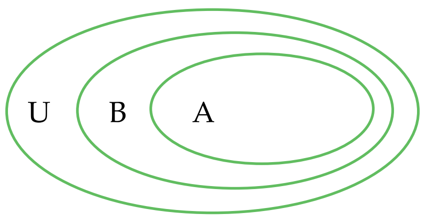
5 RELAÇÕES DE INCLUSÃO

Dado o conjunto Universo **U** = $\mathbb{N}$ (conjunto dos números naturais) e os conjuntos **A** = {1, 2, 3} e **B** = {1, 2, 3, 4, 5}, podemos observar que todo elemento de **A** é também elemento de **B**. Pode-se, então, dizer que **A** é um subconjunto de **B**. Perceba que os dois conjuntos, tanto **A** quanto **B**, são subconjuntos de $\mathbb{N}$.

Esta relação de inclusão é indicada por: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$ (lê-se: **A** está contido em **B**)
$\mathbf{B} \supset \mathbf{A}$ (lê-se: **B** contém **A**)

Numa linguagem simbólica, podemos definir a relação de inclusão da seguinte maneira: $\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \Leftrightarrow$ " $\forall x\ (x \in \mathbf{A} \rightarrow x \in \mathbf{B})$ que se lê: **A** está contido em **B**, se e somente se, qualquer que seja x, se x pertence a **A**, então, x pertence a **B**.

Visualize o seguinte Diagrama de Venn:



$A \subset B \subset U$

Simbolicamente, representamos: $\mathbf{A} \not\subset \mathbf{B} \leftrightarrow \exists x(x \in \mathbf{A} \wedge x \notin \mathbf{B})$. Lê-se: **A** não está contido em **B**, se, e somente se, existe pelo menos um elemento x que pertence a **A** e não pertence a **B**.

Relação de inclusão e propriedades:

1ª) Todo conjunto é subconjunto de si mesmo.

$$\forall A\ (A \subset A)$$

2ª) Todo conjunto é subconjunto do conjunto universo.

$$\forall A\ (A \subset U)$$

3ª) O conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto.

$$\forall A\ (\varnothing \subset A)$$

Conjunto das partes de um conjunto P(X).

Exemplo: Dado um conjunto **A** = {1, 2, 3}, o conjunto das partes de **A** é:

P(**A**) = {∅, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3}}.

Cada parte de **A** é obrigatoriamente subconjunto de **A**; note que ∅ sempre é parte de um conjunto. A quantidade de subconjuntos pode ser obtida por 2^n, onde n representa a quantidade de elementos de um conjunto. No exemplo anterior temos: $2^3 = 8$ subconjuntos.

6 IGUALDADE DOS CONJUNTOS

Dois conjuntos **A** e **B** são iguais quando todos os elementos de **A** são os mesmos elementos de **B**. A representação matemática será da seguinte forma:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \subset \mathbf{B} \text{ e } \mathbf{B} \subset \mathbf{A}.$$

7 OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

As operações com conjuntos são muito comuns no estudo da Lógica Matemática. Passaremos a descrever a seguir como essas operações podem ser realizadas.

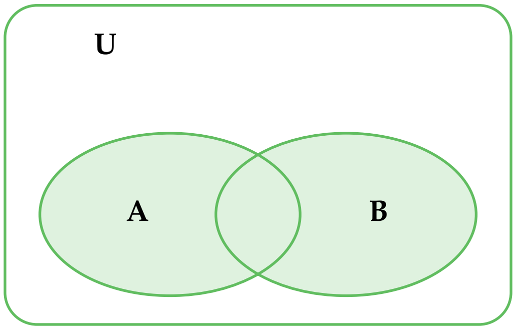
7.1 UNIÃO

Dado o conjunto universo **U** de todos os acadêmicos do curso de Matemática da Uniasselvi e os subconjuntos de **U**:

- **A**, conjunto dos acadêmicos de lógica.
- **B**, conjunto dos acadêmicos de cálculo.

O conjunto **A** ∪ **B** (lê-se: **A** união com **B**) é formado pelos acadêmicos que estudam só lógica, pelos acadêmicos que estudam lógica e cálculo e pelos acadêmicos que estudam só cálculo.

A representação do Diagrama de Venn fica da seguinte forma:



$\mathbf{A \cup B}$

Da união de conjuntos, podemos escrever as propriedades:

1ª) $A \cup B = B \cup A$	**propriedade comutativa.**
2ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	**propriedade associativa.**
3ª) $A \cup A = A$	**propriedade idempotente.**
4ª) $A \cup \varnothing = A$	**propriedade do conjunto vazio.**
5ª) $A \cup U = U$	**propriedade do conjunto universo.**

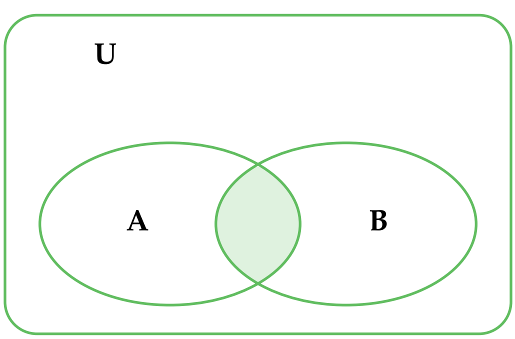
7.2 INTERSECÇÃO

A $\cap$ **B** (lê-se: **A** intersecção com **B**, ou **A** inter **B**). É formado pelos acadêmicos que estudam lógica, mas também estudam cálculo.

Simbolicamente, pode-se representar na forma matemática por:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{x / \, x \in \mathbf{A} \wedge x \in \mathbf{B})$$

No Diagrama de Venn tem-se a seguinte representação:



$\mathbf{A \cap B}$

Se tivermos $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \varnothing$, dizemos que **A** e **B** são conjuntos disjuntos, isto é, não possuem nenhum elemento comum.

Da intersecção de conjuntos, podemos escrever as propriedades:

1ª) $\mathbf{A \cap B = B \cap A}$	**propriedade comutativa.**
2ª) $\mathbf{(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)}$	**propriedade associativa.**
3ª) $\mathbf{A \cap A = A}$	**propriedade idempotente.**
4ª) $\mathbf{A \cap \varnothing = \varnothing}$	**propriedade do conjunto vazio.**
5ª) $\mathbf{A \cap U = A}$	**propriedade do conjunto universo.**

Princípio da Inclusão e Exclusão para dois ou três conjuntos:

1ª) $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

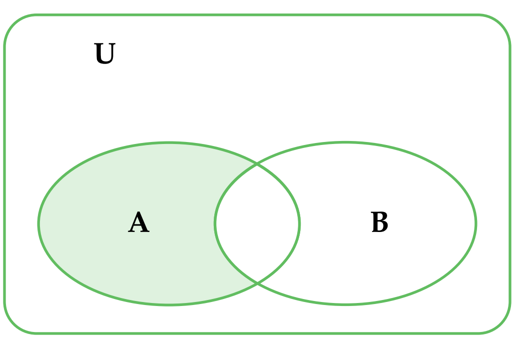
2ª) $n(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = n(\mathbf{A}) + n(\mathbf{B}) + n(\mathbf{C}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - n(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - n(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + n(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$, onde **A**, **B** e **C** são conjuntos e n(**X**) indica o número de elementos do conjunto **X**.

Ainda para as operações com conjuntos, podemos realizar subtração dos conjuntos e realizar associações dos conceitos apresentados anteriormente. Inicialmente, faremos uma explicação de como realizar a subtração de dois conjuntos e, depois, exemplos de como poderemos calcular associações desses conceitos.

Vejamos os seguintes exemplos:

a) A – B (lê-se: **A** *menos* **B**): É formado pelos acadêmicos que só estudam lógica.

Podemos representar o Diagrama de Venn da seguinte maneira:

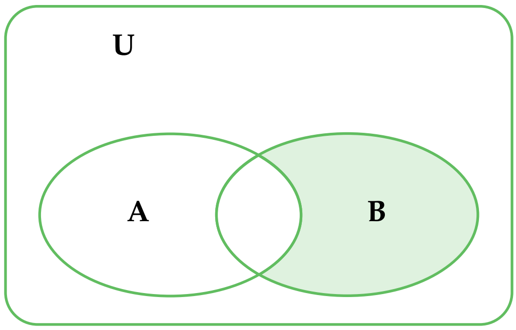


A – B

O resultado de **A – B** é formado pelos acadêmicos que estudam apenas lógica.

b) B – A (lê-se: **B** *menos* **A**): É formado pelos acadêmicos que só estudam cálculo.

Podemos representar o Diagrama de Venn da seguinte maneira:



A – B

O resultado de **B – A** é formado pelos acadêmicos que estudam apenas cálculo (parte pintada da figura).

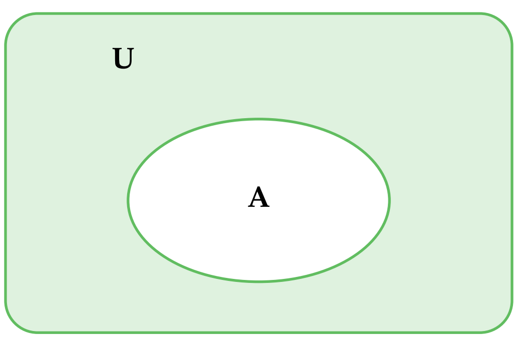
O conjunto de todos os acadêmicos de **U** que não são alunos de lógica é denominado de Complementar de **A** ou complemento de **A** em relação ao **U,** ou ainda, o que falta em **A** para que fique igual ao **U**.

Podemos representar o complementar da seguinte forma:

$C_U\mathbf{A}$ ou $\bar{\mathbf{A}}$ ou, A' ou como, **U – A**

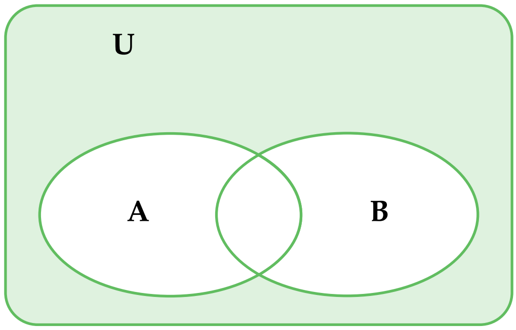
Na representação do Diagrama de Venn, simbolicamente, escreve-se:

$$C_U\mathbf{A} = \mathbf{U} - \mathbf{A} = \{x \,/\, x \in \mathbf{U} \wedge x \notin \mathbf{A}\}$$



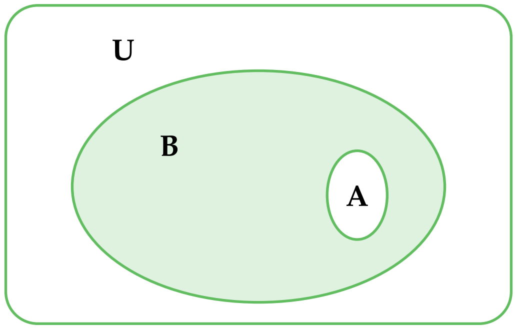
$C_U\mathbf{A}$

Veja a representação do Diagrama de Venn para C_U (**A** ∪ **B**).



C_U (**A** ∪ **B**)

Para a representação do Diagrama de Venn de C_B**A** = **B** – **A**, teremos:



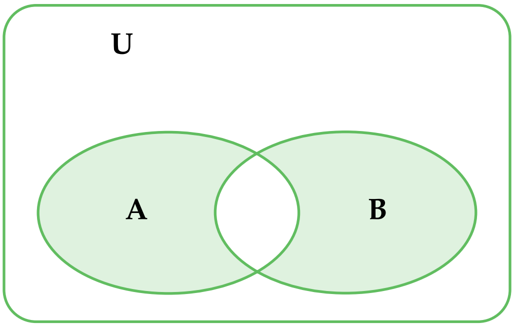
C_B**A**

Diferença simétrica entre dois conjuntos **A** e **B** é o conjunto formado pelos elementos de **A** que não pertencem a **B** ou (exclusivo) pelos elementos de **B** que não pertencem a **A**.

Representação matemática:

A ∆ **B** (Lê-se: só de **A** ou só de **B**; ou **A** ou **B**.)

O Diagrama de Venn ficará representado da seguinte forma:



A ∆ B

A diferença simétrica pode ser conferida usando a união e intersecção de **A** e **B**.

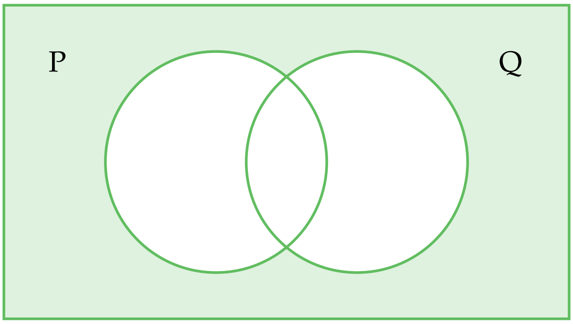
$$\mathbf{A} \,\Delta\, \mathbf{B} = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) - (\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

8 O DIAGRAMA DE VENN NO ESTUDO DA LÓGICA MATEMÁTICA

A seguir, demonstraremos alguns exemplos utilizando o Diagrama de Venn no estudo da Lógica Matemática.

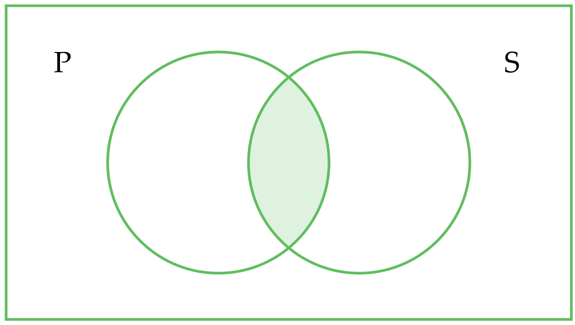
Exemplo 1: Desenhe um Diagrama de Venn para "todo **~P** é **Q**.

Essa forma afirma que o complemento do conjunto **P** é um subconjunto do conjunto **Q**. Isso significa que qualquer parte do complemento de **P** que está fora de **Q** é vazia. A parte sombreada fora do círculo **Q** é para representar que essa região é vazia.



Exemplo 2: Desenhe um Diagrama de Venn para **~**(∀ **S** é **~P**)

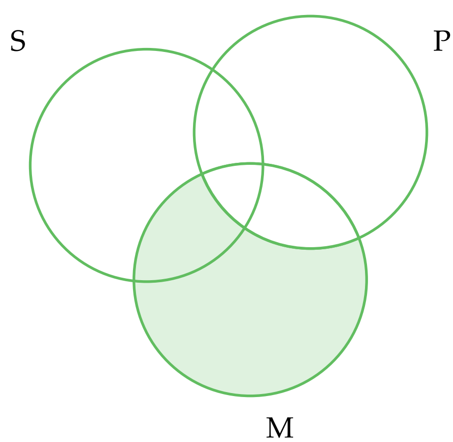
A relação "todo **S** é **~P**" diz que S é um subconjunto do complemento de P, isto é, que S e P não têm elementos comuns. O diagrama de negação ficará da seguinte forma:



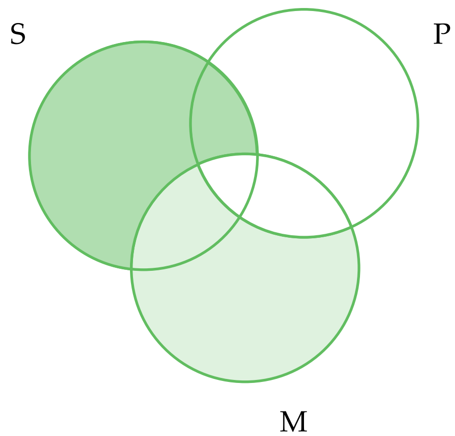
Exemplo 3: Faça o teste da validade da proposição categórica a seguir utilizando o Diagrama de Venn.

Todo **S** é **M**. Todo **M** é **P**. Logo, todo **S** é **P**.

Resolução: Para a primeira premissa deve-se pintar toda a parte de **M** que não esteja contida em **P**.



Para a segunda premissa, pintamos toda a parte de **S** não contida em **M**.

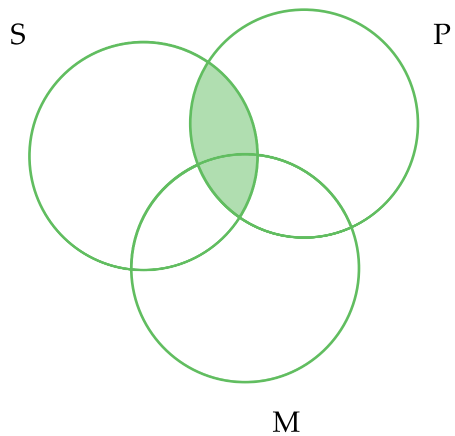


Acima, está representada a conclusão. Logo, a proposição categórica é válida.

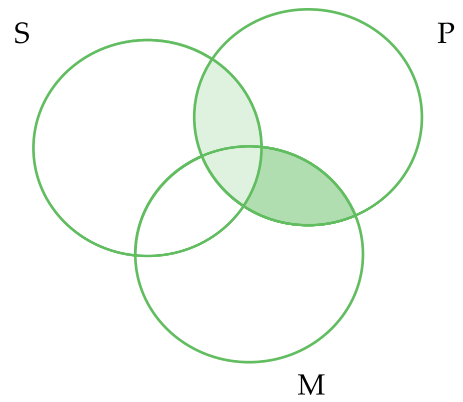
Exemplo 4: Faça o teste para validar o argumento a seguir utilizando o Diagrama de Venn.

Nenhum **S** é **P**. Nenhum **P** é **M**. Logo, nenhum **S** é **M**.

Resolução: Para a primeira premissa "Nenhum **S** é **P**" pintamos a região comum aos círculos **S** e **P**.



Na segunda premissa, pintaremos a região comum aos círculos **P** e **M**. O diagrama ficará da seguinte forma:



Observe que, neste caso, a conclusão é a parte que não foi pintada. Portanto, o argumento da forma apresentada não é válido. Logo, é um sofisma.

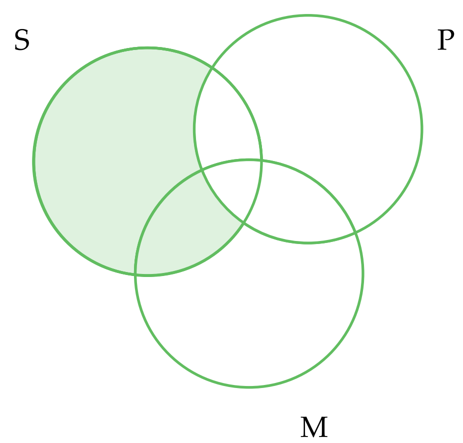
Exemplo 5: Através do Diagrama de Venn, vamos testar o seguinte argumento:

> Todos os atletas bem treinados são dedicados ao seu esporte. Nenhum atleta que é dedicado ao seu esporte é viciado em psicotrópicos. Portanto, nenhum atleta que é viciado em psicotrópicos é um atleta bem treinado.

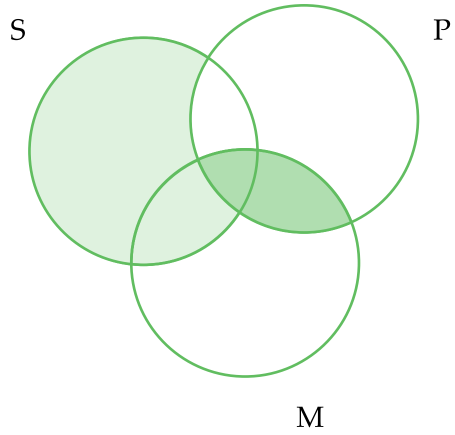
Resolução: Podemos escrever o silogismo dado da seguinte forma:

Todo **S** é **P**. Nenhum **P** é **M**. Portanto, nenhum **M** é **S**.

Para a primeira premissa "Todo **S** é **P**" pintaremos toda a região de **S** externa ao círculo **P**.



Para a segunda premissa "Nenhum **P** é **M**" pintaremos a parte comum entre **P** e **M**, obtendo o seguinte diagrama:



Dessa forma, a região comum entre M e S fica pintada (que é a região da conclusão). Logo, o diagrama mostra que a conclusão é verdadeira, dadas as premissas. Assim, o silogismo é verdadeiro.

LEITURA COMPLEMENTAR

A IMPORTÂNCIA DA LÓGICA MATEMÁTICA E A SEMÂNTICA AUXILIANDO NA APRENDIZAGEM

Prof. Raul Enrique Cuore

RESUMO

A Lógica Matemática e a Semântica estão relacionadas, na medida em que a Lógica é a ciência que coloca ordem nas operações da razão, a fim de se atingir a verdade. E a tarefa da Semântica é estabelecer em que circunstâncias no mundo uma determinada sentença é verdadeira. Este trabalho tem como objetivo mostrar a importância de se estudar a Lógica Matemática aliada à Semântica desde as séries iniciais, buscando um melhor desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, bem como das estruturas da linguagem.

Palavras-chave: Estudo. Lógica. Semântica.

1 INTRODUÇÃO

Fazemos julgamentos e construções lógicas constantemente. Por exemplo: ao acordar, temos que decidir se trocamos de roupa ou escovamos os dentes; ao atravessar a rua, precisamos nos certificar se o semáforo está fechado para os carros; quando montamos um quebra-cabeça, as figuras geométricas escolhidas deverão encaixar-se. Paralelamente ao raciocínio lógico, entra em ação a semântica, quando o significado das ideias que brotam da nossa cabeça transformou-se em novas circunstâncias inteligíveis.

Segundo Copi (1978), uma pessoa com conhecimentos de lógica tem mais probabilidades de raciocinar corretamente do que aquela que não se aprofundou no estudo desse tema. A lógica auxilia no desenvolvimento do raciocínio, da ordem das ideias e juízos.

A lógica matemática, que é também conhecida por lógica formal proposicional, pode auxiliar no discurso da linguagem, assim como o discurso da linguagem pode auxiliar no desenvolvimento lógico-matemático. O raciocínio lógico-matemático auxilia na compreensão e coerência de textos, evitando assim os problemas de ambiguidade na interpretação, pois as línguas naturais são sistemas lógicos. Sendo assim, a importância desse trabalho está no intuito de adentrarmos no paralelo entre lógica matemática e semântica, buscando justificar a necessidade de incluirmos esse assunto nas disciplinas curriculares do ensino de Matemática.

2 CONCEITOS DA LÓGICA MATEMÁTICA

De acordo com Tobias (1966), a Lógica é a ciência que coloca ordem nas operações da razão para se atingir a verdade. A lógica natural é aquela que todo ser humano dotado do uso normal de suas faculdades mentais possui. Ainda segundo Tobias (1966), a lógica artificial é a lógica natural adquirida por meio de livros e experiências, e é também chamada lógica científica ou, simplesmente, lógica.

A seguir serão definidos alguns conceitos importantes para uma melhor compreensão da Lógica Matemática. Proposição é um conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento. As proposições simples são usualmente designadas por letras latinas minúsculas, tais como p, q, r, s, dentre outras. As proposições compostas são geralmente designadas por letras latinas maiúsculas A, B, C, e outras. Tem-se, por exemplo: p: Marte é um planeta, P: Brasil é um país e Ásia é um continente.

A Lógica Matemática é definida tendo como princípios básicos: o princípio da "não contradição" e o princípio do "terceiro excluído". O princípio da "não contradição" diz que uma proposição não pode ser falsa e verdadeira simultaneamente. Por exemplo, a proposição "Maria é casada e é solteira" vai contra este princípio, pois ou ela é casada ou ela é solteira, não podendo possuir os dois estados civis. O princípio do "terceiro excluído" quer dizer que toda proposição ou é verdadeira ou é falsa, não assumindo outro valor lógico, ou seja, toda proposição tem um, e só um valor lógico, ou a verdade (V) ou a falsidade (F).

Os conectivos são palavras que são utilizadas para a formação de proposições compostas a partir de proposições simples. Os conectivos usuais da Lógica Matemática são: "e", "ou", "não" e "se... então... se e somente se...".

A tabela-verdade é um dispositivo no qual aparecem todos os valores lógicos possíveis de proposições compostas correspondentes a todos os valores lógicos possíveis atribuídos às proposições simples componentes.

Assim, por exemplo, a tabela-verdade de uma proposição simples p é apresentada tendo dois valores possíveis. O primeiro valor lógico para a proposição p é a Verdade (V) e o segundo e último valor lógico possível é a Falsidade (F).

3 A CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

A aprendizagem é um processo contínuo, gradual, em que cada indivíduo tem seu ritmo, seja ele mais lento ou mais rápido, desde o seu nascimento até o último dia de sua vida. À medida que vamos nos desenvolvendo estamos construindo e reconstruindo nossa aprendizagem diante das experiências vividas, organizando novos esquemas ou, ainda, reorganizando conhecimentos já existentes, num processo de estruturação cumulativa, isto é, vamos construindo conhecimentos a partir dos já existentes, acrescentando ou subtraindo informações a esta aprendizagem, criando novas estruturas de pensamento ou esquemas.

Estamos em permanente aprendizagem, porém aprendemos com maior facilidade na infância até a juventude, desenvolvendo-se ainda na vida adulta e estabilizando na maturidade, decrescendo na velhice.

Para ampliar os conceitos estruturados, elaborando e reelaborando novas ideias e pensamentos, faz-se necessário que o aprender aconteça de forma provocante, significativa, relacionada ao cotidiano. Para ser significativa, é necessário que a aprendizagem envolva raciocínio, análise e a interpretação correta através do relacionamento entre ideias.

Para que a construção do pensamento lógico-matemático seja consolidada, o indivíduo deve relacionar a abstração empírica com a abstração reflexiva distinguindo as partes do todo, e deste modo construir o conhecimento físico para possibilitar a elaboração do conhecimento matemático.

Com isto pode-se estabelecer que o conhecimento lógico-matemático não é inato, mas construído por meio do contato social, visto que tal conhecimento só passa a ser adquirido por volta dos cinco anos. Nesta fase já se é capaz de julgar espaço e perceber fronteiras, portanto, desde as primeiras séries do ensino os professores devem promover atividades que possibilitem trabalhar a construção e o desenvolvimento destas habilidades, encorajando o pensamento ativo, estimulando a fazer relações, para só então estender o pensamento, levando o aluno a compreender conceitos, isto através de jogos matemáticos educativos e interpretação de textos.

4 LÓGICA MATEMÁTICA E SEMÂNTICA

O dia a dia de um ser humano é regido por uma sequência de decisões e ações que perfeitamente encontram explicação nos fundamentos da Lógica Matemática e da Semântica. As instituições de ensino têm a obrigação de formar mentes que saibam pensar, criticar e tomar decisões certas no meio em que vivem. A inserção desse conteúdo nas disciplinas de Matemática e Língua Portuguesa irá fomentar o crescimento do pensamento lógico nos estudantes, abrindo o leque também para uma análise crítica de outras disciplinas.

Atualmente, o mercado de trabalho exige profissionais proativos com apurado raciocínio lógico; e premia aqueles que desenvolvem essa competência. Concursos públicos e vestibulares exigem isso dos candidatos nas provas de matemática e interpretação de textos.

Seria interessante que o estudo da Lógica Matemática com o auxílio da Semântica fizesse parte do conteúdo programático para o ensino desde as séries iniciais, tornando-o obrigatório na área de matemática e língua portuguesa, e estendendo-o facultativamente às demais disciplinas, como um projeto de interdisciplinaridade.

5 CONCLUSÃO

É crescente a dificuldade do conhecimento matemático e a falta de habilidade na interpretação de textos. Estudos relatam que o problema pode estar no estabelecimento de relações positivas quanto ao ensino, na transmissão mecânica em vez de significativa, deixando de privilegiar a investigação e a reflexão, sem contar os problemas cognitivos e afetivos, como também déficit de atenção, que podem gerar dificuldades no processo de aprendizagem da matemática e a interpretação semântica.

Tais questões devem ser contempladas no desenvolvimento do currículo escolar, na pedagogia aplicada e na escolha de materiais, textos e jogos específicos que visem desenvolver o raciocínio lógico, assim como o incentivo à leitura.

Prover o aluno de ferramentas para que, na vida adulta, possa enfrentar as questões que se fizerem presentes de uma forma mais analítica e crítica, isto passa pelo exercício da lógica-matemática e da semântica, dando-lhe, desta forma, fundações sólidas para sua formação como estudante e, principalmente, como cidadão.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico estudamos:

- As notações e representações de um conjunto.
- Tipos de conjuntos.
- Relação de inclusão.
- Propriedades dos conjuntos.
- Símbolos utilizados que não se deve esquecer:

Δ = ou
$\varnothing$ = vazio
$\cap$ = intersecção
$\cup$ = união
$\notin$ = não pertence
$\in$ = pertence
$\forall$ = qualquer que seja
$\subset$ = está contido
$\not\subset$ = não contém

AUTOATIVIDADE

Prezado acadêmico! Agora chegou a sua vez de colocar em prática os conceitos e definições estudados neste tópico.

1 Coloque **V** nas sentenças verdadeiras e **F** nas falsas:

a) ( ) $2 \in \{1, \{2\}, 4\}$
b) ( ) $\{3, 4\} \quad \{1, 2, 3, 4, 6\}$
c) ( ) $\varnothing \in \{\varnothing, 1, \{2\}\}$
d) ( ) $\{3\} \quad \{1, 2, \{3\}, 4, 5\}$
e) ( ) $\{1, \{2\}\} \subset \{1, \{2\}, 3\}$
f) ( ) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{2\}\}$
g) ( ) $4 \in \{1, \{2\}, 4\}$
h) ( ) $\{1, 2, 3, 4, 6\} \subset \{3, 4\}$

2 Dado o conjunto **A** = {1, 3, 5}, classifique as afirmações a seguir em **V** (verdadeiras) ou **F** (falsas):

a) ( ) $\forall$ x $\in$ **A**, x é primo.
b) ( ) $\{1, 5\} \quad P(\mathbf{A})$
c) ( ) $\varnothing \notin \mathbf{A}$
d) ( ) $\varnothing \subset \mathbf{A}$
e) ( ) $\{1, 3, 3, 5, 5\} = \mathbf{A}$

3 Dados os conjuntos **A** = {1, 3, 5, 7}, **B** ={ 5,7,9} e **C** = {1,3, 9}, encontre os elementos do conjunto **K**, tal que:

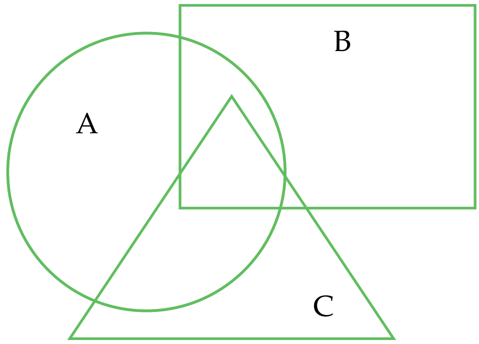
a) $\mathbf{A} \cup \mathbf{K} = \mathbf{A}$,
b) $\mathbf{B} \cup \mathbf{K} = \mathbf{B}$
c) $\mathbf{C} \cup \mathbf{K} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B}$

4 Hachure (pinte) no Diagrama de Venn para três conjuntos em que: $(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$ é diferente de $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C})$.

5 Determine os elementos dos conjuntos A, B, C, sabendo-se que:
$\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \{2,4\}$, $\mathbf{A} \cap \mathbf{C} = \{2,3\}$, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \{2, 3, 4, 5\}$ e $\mathbf{A} \cup \mathbf{C} = \{1, 2, 3, 4\}$.

6 Determine x para que A = B, dados A = {7, 15, 18, 4x} e B = {18, 15, 20, 7}.

7 Hachure no diagrama a seguir a operação: $(A - B) \cap C$.



8 Dados os conjuntos A, B, C, represente nos diagramas de Venn as operações indicadas:

a) $A \Delta B$
b) $(A \cap C) - B$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $C \Delta B$

9 Formalize como silogismo categórico o argumento seguinte, testando em seguida sua validade: Tudo o que ela fala é bobagem. Toda bobagem é desprezível. Tudo o que ela fala é desprezível.

UNIDADE 3

CÁLCULO DE PREDICADOS

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM

Após o estudo desta unidade, você será capaz de:

- compreender os conceitos e as definições da lógica de predicados;
- identificar as verdades lógicas, ressaltando a questão da simbolização da linguagem e das técnicas dedutivas;
- analisar a legitimidade dos argumentos através das regras de inferências e dos axiomas;
- identificar e classificar os erros que ocorrem nos argumentos;
- quantificar a probabilidade da conclusão de um determinado argumento.

PLANO DE ESTUDOS

Nesta unidade de ensino, a abordagem da Lógica Matemática está dividida em três tópicos, nos quais se apresentam desde a introdução das variáveis quantificadas e as estruturas lógicas mais complexas, presentes no cálculo de predicados; os erros que ocorrem nos argumentos e que afetam sua irrefutabilidade no estudo das falácias; e a probabilidade da conclusão no estudo da indução. Cada seção oferecerá subsídios que o auxiliarão na interiorização dos conteúdos e na resolução de problemas.

TÓPICO 1 – CÁLCULO DE PREDICADOS

TÓPICO 2 – FALÁCIAS

TÓPICO 3 – INDUÇÃO

CÁLCULO DE PREDICADOS

1 INTRODUÇÃO

Você já deve ter observado, ao longo do curso, que a forma de estruturar o pensamento matemático é diferente do que a feita em outras áreas, ou mesmo no dia a dia. A maneira como escrevemos as afirmações matemáticas (lemas, teoremas, preposições, corolários) sempre parte de algumas hipóteses, e tudo o que está dito depois delas precisa ser provado. Esta estrutura vem da lógica matemática!

A lógica matemática não se refere a nenhum ser, a nenhuma coisa, ou a algum objeto em particular, nem a nenhum conteúdo, mas à forma e à correção do pensamento, isto é, ela nos ensina a usar corretamente o raciocínio, o que irá lhe auxiliar tanto na preparação e organização do plano da disciplina em sua futura prática docente como em seu cotidiano, permitindo-o ser claro e objetivo. Desta forma, pensar com lógica significa ordenar o pensamento.

Nas unidades anteriores, você teve a oportunidade de conhecer essa linguagem, fazendo o estudo do conceito de argumento, validade e verdade, bem como das operações lógicas e o cálculo proposicional. Viu que o cálculo de proposições ou cálculo proposicional é a área que trata da análise de proposições compostas, isto é, proposições simples ligadas por conectivos: ~, &, v, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

Porém, você deve ter percebido que este tipo de análise não é suficiente para expressar todas as sentenças importantes da aritmética elementar. Neste contexto, esta terceira unidade é uma continuidade dos estudos até aqui realizados. O cálculo de predicados visa desenvolver uma linguagem formal que possa expressar qualquer conjunto de fatos sistemáticos, ou seja, sanar insuficiências da lógica proposicional.

Evidenciada a limitação dos recursos do cálculo proposicional, uma nova linguagem é introduzida para a análise da legitimidade de argumentos. Essa nova linguagem consiste na combinação entre conceitos de quantificadores com os da lógica proposicional, o que resulta em um sistema lógico mais amplo.

Veremos, a seguir, de que forma substantivos, adjetivos e predicados (gramaticais) se atrelam para formar sentenças. As palavras "todo" e "alguns" desempenham papel fundamental, por indicarem quantidade, razão pela qual o cálculo de predicados também é conhecido como cálculo quantificável.

Para compreender essa nova linguagem, iniciaremos revisando as regras de inferência e de equivalência do cálculo proposicional, estudadas por você na Unidade 2, pois, como já indicamos, continuarão fazendo parte dos nossos estudos.

Após a revisão destes conceitos, daremos início à linguagem do cálculo de predicados e, posteriormente, seguiremos com o estudo das verdades lógicas, deduções e teoremas pertinentes.

2 REVISÕES DAS REGRAS DE INFERÊNCIA E DE EQUIVALÊNCIA DO CÁLCULO PROPOSICIONAL

Existem dez regras básicas de inferência: uma de introdução e uma de eliminação para cada um dos cinco operadores lógicos. Como você já estudou, em uma regra de eliminação do operador, o mesmo ocorre com o operador principal em uma das premissas, mas não na conclusão. Porém, em uma regra de introdução, sucede o contrário.

A seguir, apresentamos dois quadros resumos contendo as regras básicas de inferência (não hipotéticas e hipotéticas), que continuarão fazendo parte de nossos estudos.

QUADRO 3 – REGRAS DE INFERÊNCIAS NÃO HIPOTÉTICAS

INTRODUÇÃO DA REGRA	ELIMINAÇÃO DA REGRA
• *Modus Ponens (MP)* $\varphi \rightarrow \Psi, \varphi \vdash \Psi$	• *Eliminação da Negação (~E)* $\sim\sim \varphi \vdash \varphi$
• *Introdução da Conjunção (&I)* $\varphi, \Psi \vdash \varphi \,\&\, \Psi$ ou $\varphi, \Psi \vdash \Psi \,\&\, \varphi$	• *Eliminação da Conjunção (&E)* $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \varphi$ ou $\varphi \,\&\, \Psi \vdash \Psi$
• *Introdução da Disjunção (∨I)* $\varphi \vdash \varphi \vee \Psi$ ou $\varphi \vdash \Psi \vee \varphi$	• *Eliminação da Disjunção (∨E)* $\varphi \vee \Psi, \varphi \rightarrow \chi, \Psi \rightarrow \chi \vdash \chi$
• *Introdução do Bicondicional (↔I)* $\varphi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \Psi$	• *Eliminação do Bicondicional (↔E)* $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \varphi \rightarrow \Psi$ ou $\varphi \leftrightarrow \Psi \vdash \Psi \rightarrow \varphi$

FONTE: A autora

QUADRO 4 - REGRAS DE INFERÊNCIAS HIPOTÉTICAS

• *Introdução do Condicional* ($\rightarrow I$) Dada uma derivação de uma fórmula bem formada (fbf) Ψ a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir $\varphi \rightarrow \Psi$.
• *Redução ao Absurdo (RAA)* Dada a derivação de uma contradição a partir de uma hipótese φ, podemos descartar a hipótese e inferir $\sim\varphi$.

FONTE: A autora

Das regras básicas de inferência, derivam outras cinco regras que nos auxiliam a simplificar as provas. O quadro a seguir apresenta um resumo das regras derivadas.

QUADRO 5 - REGRAS DERIVADAS

NOME	REGRA
Silogismo Hipotético (SH)	$\varphi \rightarrow \Psi, \Psi \rightarrow \chi \vdash \varphi \rightarrow \chi$
Modus Tollens (MT)	$\varphi \rightarrow \Psi, \sim\Psi \vdash \sim\varphi$
Contradição (CONTRAD)	$\varphi, \sim\varphi \vdash \Psi$
Repetição (REP)	$\varphi \vdash \varphi$
Silogismo Disjuntivo (SD)	$\varphi \vee \Psi, \sim\varphi \vdash \Psi$
Dilema Construtivo (DC)	$\varphi \vee \Psi, \varphi \rightarrow \chi, \Psi \rightarrow \theta \vdash \chi \vee \theta$

FONTE: A autora

Faremos, igualmente, uso dos teoremas de equivalência do cálculo proposicional, que também podem ser usados em provas. Desta forma, é fundamental tê-los sempre em mãos. Veja a seguir o quadro resumo com as equivalências mais importantes.

QUADRO 6 - EQUIVALÊNCIAS

NOME	EQUIVALÊNCIA
Tautologia (TAUT)	$\varphi \vee \varphi \Leftrightarrow \varphi$
	$\varphi \,\&\, \varphi \Leftrightarrow \varphi$
Comutativa (COM)	$\varphi \vee \Psi \Leftrightarrow \Psi \vee \varphi$
	$\varphi \,\&\, \Psi \Leftrightarrow \Psi \,\&\, \varphi$
Associativa (ASSOC)	$\varphi \vee (\Psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \Psi) \vee \chi$
	$\varphi \,\&\, (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \,\&\, \chi$
Distributiva (DIST)	$\varphi \,\&\, (\Psi \vee \chi) \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \vee (\varphi \,\&\, \chi)$
	$\varphi \vee (\Psi \,\&\, \chi) \Leftrightarrow (\varphi \vee \Psi) \,\&\, (\varphi \vee \chi)$
Lei de Morgam (DM)	$\sim(\varphi \,\&\, \Psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \sim\Psi$
	$\sim(\varphi \vee \Psi) \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \sim\Psi$

Implic. Material (IM)	$\varphi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\varphi \vee \Psi$
	$\sim(\varphi \rightarrow \Psi) \Leftrightarrow \varphi \,\&\, \sim\Psi$
Dupla Negação (DN)	$\varphi \Leftrightarrow \sim\sim\varphi$
Transposição (TRAN)	$\varphi \rightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\Psi \rightarrow \sim\varphi$
Exportação (EXP)	$(\varphi \,\&\, \Psi) \rightarrow \chi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow (\Psi \rightarrow \chi)$
Ambivalência (AMB)	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow \sim\varphi \leftrightarrow \sim\Psi$
	$\varphi \leftrightarrow \Psi \Leftrightarrow (\varphi \,\&\, \Psi) \vee (\sim\varphi \,\&\, \sim\Psi)$

FONTE: A autora

Estas regras e equivalências foram seu foco de estudos na Unidade 1. Caso haja dúvidas, retome os exemplos e exercícios, pois estes conceitos continuam válidos para o cálculo de predicados que daremos início a seguir.

3 VARIÁVEIS, QUANTIFICADORES E PREDICADOS

Quando combinamos os conceitos de quantificadores com os da lógica proposicional, obtemos um sistema mais amplo, capaz de expressar qualquer conjunto de fatos sistemáticos, conhecido como o cálculo de predicados.

Considere, por exemplo, a sentença:

"Todo homem é mortal"

Podemos enunciá-la como:

"Todo H é M"

Por sua vez, pode ser expresso com o uso da letra "x" para denotar uma ***variável*** que tem a função de representar objetos individuais, e assim expressamos o enunciado por:

"Qualquer que seja x, se x é H, então x é M"

Para representar a expressão "qualquer que seja", utilizamos o símbolo "$\forall$", que também é conhecido como "para todo", e é um ***quantificador universal***. Logo, em vez de escrevermos "x é H", escrevemos "Hx" e "x é M" como Mx. Usando o conectivo "$\rightarrow$" para representar o condicional, o enunciado se torna $\forall x(Hx \rightarrow Mx)$.

Esta é uma fórmula do cálculo de predicados! Esta nova notação revela uma estrutura previamente desconhecida nas proposições lógicas. Já o enunciado "Nenhum homem é imortal" é expresso como $\forall x(Hx \rightarrow \sim Ix)$.

Já os enunciados da forma "Algum homem é bonito" e "Existe homem inteligente" necessitam de um ***quantificador existencial***, denotado pelo símbolo "∃", que pode significar "algum", "existe", "para algum". Assim, "Algum homem é bonito" é expresso como $\exists x\ (Hx\ \&\ Bx)$. Uma proposição do tipo "Algum homem não é bonito" fica nesta notação, $\exists x\ (Hx\ \&\ {\sim}Bx)$.

Novos conceitos!

Quantificador Universal (∀): simboliza "qualquer que seja" ou "para todo".

Quantificador Existencial (∃): simboliza "algum", "existe", "para algum".

Você deve estar se perguntando: todo enunciado precisa conter quantificadores? Não! Existem, por exemplo, alguns predicados do tipo sujeito-predicado, os quais atribuem uma propriedade a uma pessoa ou coisa. Adotando a nomenclatura de prefixar o predicado por uma letra maiúscula, seguida pelo sujeito representado por uma letra minúscula. A sentença "Bia é feliz" é formalizada por **Fb**, onde:

F = feliz (o predicado)
b = Bia (o sujeito)

Alguns predicados podem ser combinados com dois ou mais nomes para formar uma sentença, isto ocorre para alguns verbos transitivos, os quais exigem um sujeito e um objeto direto. Eles são usualmente escritos em notação lógica na sequência predicado-sujeito-objeto. Um exemplo desta situação pode ser enunciado por "Jorge ama Grazielle", e é formalizada por Ajg.

De acordo com o número de nomes próprios exigidos, os predicados são chamados de unários, binários, ternários etc. Podemos também misturar variáveis com nomes próprios. Assim, o enunciado "Jorge ama alguém" é formalizado por "$\exists xAjx$", onde "alguém" é representado pela variável x.

AUTOATIVIDADE

1 Interpretada pela letra “C” a sentença “Está chovendo”, e pelas letras “G”, “M”, “P” e “S” os predicados “é um gato”, “é manhoso”, “é peludo” e “é saltitante”, respectivamente, formalize as seguintes sentenças:

a) Todos os gatos são peludos.
b) Nenhum gato é manhoso.
c) Alguns gatos não são peludos.
d) Nada é um gato.
e) Existem gatos saltitantes.
f) Está chovendo e alguns gatos estão saltitando.
g) Se está chovendo, então todos os gatos estão saltitando.
h) Todos os gatos são gatos.
i) Gatos manhosos saltam se, e somente se, não está chovendo.
j) Não é verdade que alguns gatos peludos estão saltitando.

2 Formalize os seguintes enunciados interpretando “a” e “b” como nomes próprios “Ana” e “Bernardo”; “M”, “P” e “A” como os predicados unários “é médico”, “é professora” e “é anel”; “L” e “T” como os predicados binários “ama” e “é mais alto do que”; “D” como o predicado ternário “...dá...para...”.

a) Ana é professora.
b) Bernardo é médico.
c) Ana é médica ou professora (ou ambos).
d) Se Ana é professora, então ela não é médica.
e) Ana ama Bernardo.
f) Bernardo ama a si próprio.
g) Bernardo deu alguma coisa para Ana.
h) Bernardo deu um anel para Ana.
i) Bernardo é mais alto do que Ana.
j) Para quaisquer três objetos, se o primeiro é mais alto que o segundo e o segundo é mais alto do que o terceiro, então o primeiro é mais alto que o terceiro.

4 VOCABULÁRIO E REGRAS DE FORMAÇÃO

A seguir, apresentaremos a sintaxe da linguagem formal do Cálculo de Predicados. O vocabulário desta linguagem é dividido em duas partes: os símbolos lógicos (cuja interpretação permanece fixa em todos os contextos) e os símbolos não lógicos (cuja interpretação varia de problema a problema).

QUADRO 7 - SÍMBOLOS LÓGICOS

SÍMBOLOS LÓGICOS	
Operadores Lógicos	"~"; "&"; "v"; "→"; "↔"
Quantificadores	"∀"; "∃"
Parênteses	"("; ")"

FONTE: A autora

QUADRO 8 - SÍMBOLOS NÃO LÓGICOS

SÍMBOLOS NÃO LÓGICOS	
Letras Nominais	Letras minúsculas de "a" até "t"
Variáveis	Letras minúsculas de "u" a "z"
Letras Predicativas	Letras maiúsculas "A", "B", "C", ...

FONTE: A autora

Qualquer sequência finita de elementos do vocabulário, seja composta por símbolos lógicos ou não lógicos, é definida como *fórmula* de linguagem. Quando uma fórmula é composta por uma letra predicativa seguida por nenhuma, uma ou mais letras nominais, recebe o nome de fórmula atômica.

Fórmulas atômicas sem letras nominais são exatamente as letras sentenciais do cálculo proposicional. Podem também representar verbos intransitivos, como a fórmula C poderia significar CHOVE.

O conceito de fórmula bem formada (fbf) do cálculo de predicados é definido pelas seguintes regras de formação:

1. Toda fórmula atômica é uma fbf.

2. Se φ é uma fbf, então ~φ também é.

3. Se φ e Ψ são fbf, então $(\varphi \,\&\, \Psi)$, $(\varphi \vee \Psi)$, $(\varphi \rightarrow \Psi)$ e $(\varphi \leftrightarrow \Psi)$ são fbf.

4. Se φ é uma fbf contendo uma letra nominal α, então qualquer fórmula da forma $\forall\ \beta\ \varphi\ \beta\ /\ \alpha$ ou $\exists\ \beta\ \varphi\ \beta\ /\ \alpha$ também é uma fbf, onde $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em φ por uma variável β que não ocorre em φ.

A regra 4 nos permite gerar fórmulas quantificadas a partir de uma fórmula φ. Seja, por exemplo, φ a fórmula "Ajg" (Jorge ama Grazielle). Consideremos a letra nominal α como sendo "g" e β a variável x. Podemos então, produzir a fórmula bem formada $\exists xAjx$ (Jorge ama alguém), ou, alternativamente, $\forall xAjx$ (Jorge ama todo mundo).

5 REGRAS DE INFERÊNCIA

Conforme já instruímos no item "revisão", o cálculo de predicados faz uso das mesmas regras do cálculo proposicional. Desta forma, podemos dizer que o cálculo proposicional é um caso particular do cálculo de predicados que possui, além disso, regras de introdução e eliminação para os quantificadores.

A seguir, enunciaremos a primeira das quatro novas regras, a regra de eliminação do quantificador universal. Ela estabelece que o que é verdadeiro para qualquer coisa deve ser verdadeiro, também, para um indivíduo particular.

Eliminação Universal (EU): de uma fbf universalmente quantificada $\forall\ \beta\ \varphi$ podemos inferir uma fbf $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$, a qual resulta substituindo-se cada ocorrência da variável β em φ por uma letra nominal α.

Vejamos alguns exemplos para melhor compreender este conceito.

Exemplo 1: Vamos formalizar e provar o seguinte argumento: "Todos os homens são mortais. Sócrates é um homem. Portanto, Sócrates é mortal".

Usando "H" para "é um homem", "M" para "é mortal" e "s" para Sócrates, formalizamos este argumento por: $\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$, $Hs \vdash Ms$.

Provemos a validade:

1	$\forall x\ (Hx \rightarrow Mx)$	*P (premissa)*
2	Hs	*P (premissa)*
3	$Hs \rightarrow Ms$	1 *EU (linha* 1, *eliminação do universal)*
4	Ms	2, 3 *MP (linhas* 2 *e* 3, *modus ponens)*

Na linha 3, aplicamos a eliminação do universal (EU). Como vimos anteriormente, ela estabelece que o que é verdadeiro para qualquer coisa deve ser verdadeiro, também, para um indivíduo particular. Neste caso, é verdadeiro que

"Todos os homens são mortais". Assim, podemos derivar que, se "Sócrates é um homem", então "Sócrates é mortal". Com relação à regra EU, β é "x", α é "s", φ é "$(Hx \to Mx)$" e $\varphi\beta/_{\alpha}$ é "$Hs \to Ms$".

Na sequência, veremos algumas provas envolvendo EU. Indicaremos as regras utilizadas por meio de abreviações. Caso haja dúvidas, retorne ao tópico de revisão.

Exemplo 2: Todo paulistano (C) é paulista (P). Todo paulista é brasileiro(B). Ayrton Senna (a) é paulistano. Logo, Ayrton Senna é brasileiro.

$$\forall x\,(Cx \to Px),\ \forall x\,(Px \to Bx),\ Ca \vdash Ba$$

Prova:

1	$\forall x\,(Cx \to Px)$	*P*
2	$\forall x\,(Px \to Bx)$	*P*
3	Ca	*P*
4	$Ca \to Pa$	1 *EU*
5	$Pa \to Ba$	2 *EU*
6	Pa	3,4 *MP*
7	Ba	5,6 *MP*

Exemplo 3: Se todos são felizes (F), então todos gostam de viver bem (G). Amanda (a) não gosta de viver bem. Portanto, nem todos são felizes.

$$\forall xFx \to \forall xGx,\ {\sim}Ga \vdash {\sim}\forall xFx$$

Prova:

1	$\forall xFx \to \forall xGx$	*P*
2	${\sim}Ga$	*P*
3	$\vert\ \forall xFx$	*H (p/ RAA)*
4	$\vert\ \forall xGx$	1,3 *MP*
5	$\vert\ Ga$	4 *EU*
6	$\vert\ Ga\ \&\ {\sim}Ga$	2,5 *&I*
7	${\sim}\forall xFx$	3 – 6 *RAA*

Exemplo 4: Todos os homens (H) são mortais (M). Zeus (z) é imortal. Portanto, Zeus não é um homem.

$$\forall x(Hx \to Mx),\ {\sim}Mz \vdash {\sim}Hz$$

Prova:

1	$\forall$x(Hx $\to$ Mx)	P
2	~Mz	P
3	Hz $\to$ Mz	1 EU
4	~Hz	3,4 MT

Introdução do Universal (IU): Para uma fbf φ contendo uma letra nominal α que não ocorre em qualquer premissa ou hipótese vigente na linha em que φ ocorre, podemos inferir uma fbf da forma $\forall\, \beta\, \varphi\, \beta \,/\, \alpha$, onde $\varphi\, \beta \,/\, \alpha$ é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em φ por uma variável β que não ocorra em φ.

Introduzir o quantificador universal significa generalizar. Como não podemos generalizar a partir de casos particulares, existe a exigência de que o indivíduo α não ocorra em qualquer premissa ou em qualquer hipótese vigente. O indivíduo α deve ser anônimo, o que significa que este pode ser qualquer indivíduo do universo. Tudo se passa como se o indivíduo α já fosse uma variável. Vejamos a prova de alguns argumentos.

Exemplo 1: Todo indaialense (I) é catarinense (C). Todo catarinense é brasileiro (B). Logo, todo indaialense é brasileiro.

$$\forall x(Ix \to Cx),\ \forall x(Cx \to Br) \vdash \forall x(Ix \to Bx)$$

Prova:

1	$\forall x(Ix \to Cx)$	P
2	$\forall x(Cx \to Bx)$	P
3	$Ia \to Ca$	1 EU
4	$Ca \to Ba$	2 EU
5	$Ia \to Ba$	3,4 SH
6	$\forall x(Ix \to Bx)$	5 IU

Acadêmico, observe que este é um exemplo em que a introdução do universal (IU) foi utilizada corretamente (linha 6), pois nada se conhece, em premissas, a respeito do indivíduo “a”. Na verdade, ele foi obtido a partir da regra EU e funciona como indivíduo anônimo, podendo ser qualquer um. Assim, é permitido o uso da regra oposta IU.

Exemplo 2: Todo gato é peludo (P) e amável (A). Logo, todo gato é peludo e todo gato é amável.

$$\forall x(Px \,\&\, Ax) \vdash \forall xPx \,\&\, \forall xAx$$

Prova:

1	$\forall x(Px \,\&\, Ax)$	P
2	$Pa \,\&\, Aa$	1 EU
3	Pa	2 &E
4	$\forall xPx$	3 IU
5	Aa	2 &E
6	$\forall xAx$	5 IU
7	$\forall xPx \,\&\, \forall xAx$	4,6 &I

Exemplo 3: Todo professor (P) é imortal (I) ou dedicado (D). Ninguém é imortal. Logo, todo professor é dedicado.

$$\forall x(Px \rightarrow (Ix \vee Dx)),\ \forall x\ {\sim}Ix \vdash \forall xPx \rightarrow \forall xDx$$

Prova:

1	$\forall x(Px \rightarrow (Ix \vee Dx))$	*P*
2	$\forall x\ {\sim}Ix$	*P*
3	$\forall xPx$	*H (p/ PC)*
4	Pa	3 *EU*
5	$Pa \rightarrow (Ia \vee Da)$	1 *EU*
6	$Ia \vee Da$	4,5 *MP*
7	${\sim}Ia$	2 *EU*
8	Da	6,7 *SD*
9	$\forall xDx$	8 *IU*
10	$\forall xPx \rightarrow \forall xDx$	3 – 9 *PC*

A seguir, você pode acompanhar alguns contraexemplos, isto é, situações em que a introdução do universal desobedece à regra.

Exemplo 1: Bárbara é feliz. Logo, todo mundo é feliz.

$$Fb \vdash \forall xFx$$

Prova:

1	Fb	*P*
2	∀xFx	1 *IU*

Incorreto, pois a letra nominal "b", que é substituída pela variável, ocorre na premissa.

Exemplo 2: Todo professor (P) é estudioso (E). Logo, o professor Daniel (d) é todo estudioso.

$$\forall x(Px \rightarrow Ex) \vdash Pd \rightarrow \forall xEx$$

Prova:

1	$\forall x(Px \rightarrow Ex)$	*P*
2	$Pd \rightarrow Ed$	1 *EU*
3	Pd	*H* (*p/ PC*)
4	Ed	2,3 *MP*
5	$\forall xEx$	4 *IU*
6	$Pd \rightarrow \forall xEx$	3 – 5 *PC*

A introdução do universal está incorreta na linha 5, pois a aplicação (da IU) está sendo feita sobre a letra nominal "d" que ocorre numa hipótese vigente.

Exemplo 3: Todo mundo ama (A) a si mesmo. Cris (c) ama a todos.

$$\forall x\ Axx \vdash \forall x\ Acx$$

Prova:

1	$\forall x\ Axx$	*P*
2	Acc	1 *EU*
3	$\forall x Acx$	2 *IU*

A introdução do universal está incorreta na linha 3, pois apenas uma das duas ocorrências da variável x está sendo substituída pela letra nominal c.

Prosseguindo os estudos, veremos as regras de inferência para o quantificador existencial (∃). Tal como o quantificador universal, o quantificador existencial apresenta duas regras: de introdução e de eliminação.

A regra para introdução do existencial (IE) trata-se de uma regra direta que diz: se um ente, representado por uma letra nominal, tem uma propriedade, segue-se que existe alguém que tem esta propriedade. Em termos formais:

Introdução do Existencial (IE): Dada uma fbf φ contendo uma letra nominal α, podemos inferir uma fbf da forma $\exists\ \beta\ \varphi\ \beta\ /\ \alpha$, onde $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em φ por uma variável β, que não ocorra em φ.

Vejamos os exemplos:

Exemplo 1: Todos são felizes (F). Logo, existe alguém feliz.

$$\forall x\ Fx \vdash \exists x Fx$$

Prova:

1	$\forall x\ Fx$	*P*
2	Fa	1 *EU*
3	$\exists x\ Fx$	2 *IE*

Exemplo 2: Não existe alguém feliz (F). Logo, todos são infelizes (~F).

$$\sim\exists x\ Fx \vdash \forall x\sim Fx$$

Prova:

1	$\sim\exists x\, Fx$	P
2	Fa	H (p/ RAA)
3	$\exists x\, Fx$	2 IE
4	$\exists x\, Fx\ \&\ \sim\exists x\, Fx$	1,3 $\&I$
5	$\sim Fa$	2 – 4 RAA
6	$\forall x \sim Fx$	5 IU

Para podermos desenvolver raciocínios a partir de premissas ou fbfs intermediárias existenciais é necessária uma segunda regra para o quantificador existencial: a eliminação do existencial (EE), a qual faz uso do raciocínio hipotético.

Recordando que uma fbf existencial afirma que pelo menos um indivíduo tem a propriedade, colocamos como hipótese um indivíduo (representado por uma letra nominal) que representa uma dessas coisas que tem essa propriedade. Como não se sabe quem ele é, ele deve ser assumido como um novo indivíduo (anônimo), não presente em nenhum outro lugar, como numa premissa ou numa hipótese em aberto. Então, derivamos desta hipótese (para EE) alguma fbf que interessa manter. Se nesta fbf concluída não ocorrer o indivíduo introduzido na hipótese, então o raciocínio hipotético pode ser finalizado na hipótese.

Das considerações acima mencionadas, resulta a seguinte regra.

Eliminação do Existencial (EE): Dada uma fbf quantificada existencialmente $\exists\ \beta\ \varphi$ e uma derivação de alguma conclusão Ψ de uma hipótese da forma $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em φ por uma letra nominal α que não ocorra em φ), podemos descartar $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ e reafirmar Ψ. Restrição: a letra nominal α não pode ocorrer em Ψ, nem em qualquer premissa, nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE é aplicada.

Para melhor compreensão da definição, vejamos os exemplos.

Exemplo 1: Formalize e prove o argumento: "Existem professores (P) e médicos (M). Portanto, existem professores".

Formalização: $\exists x\ (Px\ \&\ Mx) \vdash \exists x Px$

Prova:

1	$\exists x\ (Px\ \&\ Mx)$	P
2	$Pa\ \&\ Ma$	H (p/ EE)
3	Pa	2 $\&E$
4	$\exists x Px$	3 IE
5	$\exists x Px$	1,2 – 4 EE

Na derivação acima, $\exists\ \beta\ \varphi$ é "$\exists x\ (Px\ \&\ Mx)$", α é "a", $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ é "$Pa\ \&\ Ma$" e Ψ é "$\exists x Px$". $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ é uma instância representativa de $\exists\ \beta\ \varphi$, pois α representa uma das coisas que tem a propriedade φ.

Exemplo 2: Existe alguém que ama a todos. Logo, todos são amados por alguém.

Formalização: $\exists x \forall y Axy \vdash \forall x \exists y Ayx$
Prova:

1	$\exists x \forall y Axy$	*P*
2	$\forall y Acy$	*H (p/ EE)*
3	Acb	*2 EU*
4	$\exists y Ayb$	*3 IE*
5	$\exists y Ayb$	1,2 – 4 *EE*
6	$\forall x \exists y Ayx$	5 *IU*

Exemplo 3: Prove $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$, $\sim\exists xGx \vdash \sim\exists xFx$.

1	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	*P*
2	$\sim\exists xGx$	*P*
3	$\exists xFx$	*H* (*p*/ *RAA*)
4	Fa	*H* (*p*/ *EE*)
5	$Fa \rightarrow Ga$	1 *EU*
6	Ga	4,5 *MP*
7	$\exists xGx$	6 *IE*
8	$\exists xGx$	3, 4 – 7 *EE*
9	$\exists xGx \ \& \sim\exists xGx$	2, 8 &*I*
10	$\sim\exists xFx$	3 – 9 *RAA*

A seguir, você pode acompanhar dois contraexemplos, isto é, situações em que a eliminação do existencial não pode ser utilizada, pois desobedece à regra.

Exemplo 1: $\exists x\ \mathbf{(}Fx \ \& \ Gx\mathbf{)} \vdash Fa$

1	$\exists x\ (Fx \ \& \ Gx)$	*P*
2	$Fa \ \& \ Ga$	*H* (*p*/ *EE*)
3	Fa	2 &*E*
4	Fa	1, 2 – 3 *EE*

A aplicação da regra de eliminação do existencial (EE) está incorreta, pois α (representado pela letra "a") não pode ocorrer em hipótese vigente.

Exemplo 2: Fa, $\exists xFx \vdash \exists x(Fx \ \& \ Gx)$

1	Fa	*P*
2	$\exists xFx$	*P*
3	Ga	*H* (*p*/ *EE*)
4	$Fa \ \& \ Ga$	1, 3 &*I*
5	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	4 *IE*
6	$\exists x(Fx \ \& \ Gx)$	2, 3 – 5 *EE*

A aplicação da regra de eliminação do existencial (EE) está incorreta, pois α (representado pela letra "a") não pode ocorrer em qualquer premissa.

AUTOATIVIDADE

1 Formalize e prove os seguintes argumentos:

a) Todos os homens (H) são mortais (M). Todos os mortais são felizes (F). Logo, todos os homens são felizes.

b) Existem pessoas queridas (Q) e educadas (E). Então, existem pessoas queridas.

6 TEOREMAS E EQUIVALÊNCIAS

Assim como no cálculo proposicional, o cálculo de predicados possui teoremas expressáveis em termos de quantificadores e variáveis, como:

$$\vdash \forall x(Gx \rightarrow Gx)$$
$$\vdash \forall x(Gx \rightarrow Ga)$$
$$\vdash \sim(\forall xGx \ \& \ \exists x{\sim}Gx)$$

IMPORTANTE

Note, que teoremas são fbfs sem premissas!

Existem quatro importantes equivalências que relacionam de forma próxima os dois quantificadores do cálculo de predicados com o operador de negação.

$$\vdash \sim\forall x{\sim}Fx \leftrightarrow \exists xFx$$
$$\vdash \sim\forall xFx \leftrightarrow \exists x{\sim}Fx$$
$$\vdash \forall x{\sim}Fx \leftrightarrow \sim\exists xFx$$
$$\vdash \forall xFx \leftrightarrow \sim\exists x{\sim}Fx$$

Vejamos a prova da primeira destas equivalências:

1ª Equivalência: $\vdash$ **$\forall x{\sim}Fx \leftrightarrow \exists xFx$**

1	$\sim\forall x\sim Fx$	H (p/ PC)
2	$\sim\exists xFx$	H (p/ RAA)
3	Fa	H (p/ RAA)
4	$\exists xFx$	3 IE
5	$\exists xFx \;\&\; \sim\exists xFx$	2, 4 &I
6	$\sim Fa$	3 – 5 RAA
7	$\forall x\sim Fx$	6 IU
8	$\forall x\sim Fx \;\&\; \sim\forall x\sim Fx$	1, 7 &I
9	$\sim\sim\exists xFx$	2 – 8 RAA
10	$\exists xFx$	9~E
11	$\sim\forall x\sim Fx \rightarrow \exists xFx$	1 – 10 PC
12	$\exists xFx$	H (p/ PC)
13	Fa	H (p/ EE)
14	$\forall x\sim Fx$	H (p/ RAA)
15	$\sim Fa$	14 EU
16	$Fa \;\&\; \sim Fa$	13, 15 &I
17	$\sim\forall x\sim Fx$	14 – 16 RAA
18	$\sim\forall x\sim Fx$	12, 13 – 17 EE
19	$\exists xFx \rightarrow \sim\forall x\sim Fx$	12 – 18 PC
20	$\sim\forall x\sim Fx \leftrightarrow \exists xFx$	11, 19 $\leftrightarrow I$

AUTOATIVIDADE

1 A habilidade de provar um teorema se desenvolve com treino! Desta forma, exercite provando a equivalência a seguir:

$$\vdash \sim\forall \mathrm{xFx} \leftrightarrow \exists \mathrm{x}\sim \mathrm{Fx}$$

Fica a critério do acadêmico exercitar as outras duas equivalências.

Em lugar de Fx, poderia haver qualquer outra fbf φ aberta para qualquer outra variável β em lugar da variável x. Assim, de uma forma mais geral, podemos escrever:

$$\vdash \sim\forall\beta\sim\varphi \leftrightarrow \exists\beta\varphi$$
$$\vdash \sim\forall\beta\varphi \leftrightarrow \exists\beta\sim\varphi$$
$$\vdash \forall\beta\sim\varphi \leftrightarrow \sim\exists\beta\varphi$$
$$\vdash \forall\beta\varphi \leftrightarrow \sim\exists\beta\sim\varphi$$

Observe que as quatro regras seguem o mesmo princípio, intercambiam os quantificadores universal e existencial entre si e deslocam a posição do operador "~" do início para antes de φ, lembrando que quando ocorre "~~" há cancelamento por dupla negação.

Estes quatro casos são conhecidos como **Intercâmbio de Quantificadores (IQ)**, regra essa usada para justificar a substituição pela forma equivalente. Vejamos agora alguns argumentos que podem ser provados utilizando estas regras.

Exemplo 1: Todo corintiano (C) é não gremista (G). Portanto, não existem torcedores que são corintianos e gremistas.

$$\forall x(Cx \rightarrow {\sim}Gx) \vdash {\sim}\exists x(Cx \,\&\, Gx)$$

Prova:

1	$\forall x(Cx \rightarrow {\sim}Gx)$	*P*
2	$Ca \rightarrow {\sim}Ga$	1 *EU*
3	${\sim}Ca \vee {\sim}Ga$	2 *IM*
4	${\sim}(Ca \,\&\, Ga)$	3 *DM*
5	$\forall x{\sim}(Cx \,\&\, Gx)$	4 *IU*
6	${\sim}\exists x(Cx \,\&\, Gx)$	5 *IQ*

Exemplo 2: Todo indaialense (I) é catarinense (C). Existem pessoas que não são catarinenses. Portanto, nem todos são indaialenses.

$$\forall x(Ix \rightarrow Cx), \exists x{\sim}Cx \vdash {\sim}\forall xIx$$

Prova:

1	$\forall x(Ix \rightarrow Cx)$	*P*
2	$\exists x{\sim}Cx$	*P*
3	$\mid {\sim}Ca$	*H (p/ EE)*
4	$\mid Ia \rightarrow Ca$	1 *EU*
5	$\mid {\sim}Ia$	3, 4 *MT*
6	$\mid \exists x{\sim}Ix$	5 *IE*
7	$\exists x{\sim}Ix$	2, 3 – 6 *EE*
8	${\sim}\forall xIx$	7 *IQ*

7 IDENTIDADE

Ampliaremos o cálculo de predicados através da introdução de um predicado especial, "=" que significa "é idêntico a" ou "é igual a". Diferentemente dos outros predicados, ele é escrito entre as letras nominais às quais se aplica, e não antes dela. Para representar que "Xuxa (x) é a mesma pessoa que Maria da Graça Meneghel (m)", escrevemos x = m. Uma expressão como ~a = b é frequentemente escrita como a ≠ b.

Este símbolo é comumente utilizado em outras áreas da matemática. Assim, você já deve estar familiarizado com as regras de introdução e eliminação para o predicado de identidade em expressões algébricas. Recordaremos a definição.

Introdução da Identidade (=I): para qualquer letra nominal α, podemos afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer de prova.

Vejamos os exemplos:

Exemplo 1: Este teorema trata-se da lei da reflexibilidade de identidade. $\vdash \forall x(x = x)$

1	$\alpha = \alpha$	$= I$
2	$\forall x(x = x)$	1 IU

Exemplo 2: $\vdash \exists x(\alpha = x)$

1	$\alpha = \alpha$	$= I$
2	$\exists x(\alpha = x)$	1 IE

Eliminação da Identidade (= E): se φ é uma fbf contendo uma letra nominal α, então de φ e de $\alpha = \beta$ podemos inferir $\varphi\, \beta / \alpha$, o resultado de se substituir pelo menos uma ocorrência de α por β.

Vamos tentar compreender melhor esta definição nos exemplos a seguir.

Exemplo 1: $Ha, a = b \vdash Hb$

1	Ha	P
2	$a = b$	P
3	Hb	1, 2 $= E$

Exemplo 2: $Ga, \sim Gb \vdash \sim a = b$

1	Ga	P
2	$\sim Gb$	P
3	$\mid a = b$	H (*p/ RAA*)
4	$\mid Gb$	1, 3 $= E$
5	$\mid Gb \,\&\, \sim Gb$	2,4 $\&I$
6	$\sim a = b$	3 – 5 RAA

AUTOATIVIDADE

1 Acadêmico, não se preocupe em acertar logo na primeira tentativa. A prova é um exercício de tentativas e erros, até encontrar o caminho certo. Costumamos dizer que a lógica é o quebra-cabeça da matemática. Boa diversão para provar o seguinte teorema:

$\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow y = x)$.

LEIA MAIS EM: HEGENBERG, Leônidas. **Lógica:** o cálculo de predicados. 3. ed. São Paulo: EPU, 2010.

RESUMO DO TÓPICO 1

Neste tópico você viu que:

- **Quantificador Universal ($\forall$):** simboliza "qualquer que seja" ou "para todo".

  - *Introdução do Universal (IU):* Para uma fbf φ contendo uma letra nominal α que não ocorre em qualquer premissa ou hipótese vigente na linha em que φ ocorre, podemos inferir uma fbf da forma $\forall\ \beta\ \varphi\ \beta\ /\ \alpha$, onde $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$ é o resultado de se substituir todas as ocorrências de α em φ por uma variável β que não ocorra em φ.

  - *Eliminação Universal (EU):* de uma fbf universalmente quantificada $\forall\beta\varphi$ podemos inferir uma fbf $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$, a qual resulta substituindo-se cada ocorrência da variável β em φ por uma letra nominal α.

- **Quantificador Existencial ($\exists$):** simboliza "algum", "existe", "para algum".

  - *Introdução do Existencial (IE):* Dada uma fbf φ contendo uma letra nominal α, podemos inferir uma fbf da forma $\exists\ \beta\ \varphi\ \beta\ /\ \alpha$, onde $\varphi\beta/\alpha$ é o resultado de se substituir uma ou mais ocorrências de α em φ por uma variável β, que não ocorra em φ.

  - *Eliminação do Existencial (EE):* Dada uma fbf quantificada existencialmente $\exists\beta\varphi$ e uma derivação de alguma conclusão Ψ de uma hipótese da forma $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ (o resultado de se substituir cada ocorrência da variável β em φ por uma letra nominal α que não ocorra em φ), podemos descartar $\varphi\ \alpha\ /\ \beta$ e reafirmar Ψ. Restrição: a letra nominal α não pode ocorrer em Ψ, nem em qualquer premissa, nem em qualquer hipótese vigente na linha em que EE é aplicada.

- **Identidade**

  - *Introdução da Identidade (=I):* para qualquer letra nominal α podemos afirmar $\alpha = \alpha$ numa linha qualquer de prova.

  - *Eliminação da Identidade (= E):* se φ é uma fbf contendo uma letra nominal α, então de φ e de $\alpha = \beta$ podemos inferir $\varphi\ \beta\ /\ \alpha$, o resultado de se substituir pelo menos uma ocorrência de α por β.

AUTOATIVIDADE

Acadêmico, um argumento é um conjunto de enunciados que apresentam relação entre si, onde um enunciado é a conclusão e os demais são denominados de premissas. Normalmente, argumentos são utilizados para provar a validade de algum enunciado, ou seja, para convencer alguém da verdade ou da falsidade de um enunciado. Assim, nos exercícios de 1 a 3, construa uma prova formal de validade para os argumentos.

1 Nenhum gari é rico. Não há político que não seja rico. Portanto, os garis nunca são políticos.

2 Todo jogador de pingue-pongue pode ser considerado um atleta. Algumas meninas jogam pingue-pongue. Portanto, algumas meninas são atletas.

3 Todos os que tiraram boas notas passaram de ano. João não passou de ano. Portanto, Joaquim não tirou boas notas.

TÓPICO 2

FALÁCIAS

1 INTRODUÇÃO

O estudo do cálculo proposicional e do cálculo de predicados nos possibilitou avaliar, de forma bem-sucedida, uma gama enorme de argumentos. No entanto, para alguns argumentos, esses métodos falham, pois não possibilitam avaliar a real verdade ou falsidade das premissas, nem a relevância de se suprimir uma evidência relacionada com a conclusão.

Com o intuito de melhor estudar esses argumentos que fogem do “padrão” até aqui estudado, iniciaremos nesta seção o estudo das falácias, conhecidas também como sofismas.

Há divergências na conceitualização das falácias (ou sofismas). Neste estudo, tomaremos falácias como erros que ocorrem nos argumentos e que afetam a validade da prova. Argumentos falaciosos são enganosos, pois se confundem com bons argumentos, isso ocorre quando aceitamos premissas que não deveríamos ou fazemos uso inadequado dos fatos.

Antes de listar as falácias mais frequentes, há uma ressalva que precisamos expor: alguns matemáticos discordam que as falácias estejam no escopo do estudo de lógica, visto que os argumentos logicamente inválidos podem assumir diversas formas. Assim este é um estudo informal.

Nesta seção abordaremos seis classes de falácias: falácias de relevância, falácias de raciocínio circular, falácias semânticas, falácias indutivas, falácias formais e falácias de premissas falsas.

2 FALÁCIAS DE RELEVÂNCIA

As falácias de relevância acontecem quando utilizamos, no argumento, premissas que não possuem relação com a conclusão, ou seja, não são relevantes para a conclusão. Geralmente, isso ocorre para desviar a atenção do real problema.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: Analise o seguinte argumento:

João defende a diminuição de sódio nos alimentos em conserva.
João é um ex-prisioneiro.
∴ Não devemos diminuir a quantidade de sódio nos alimentos em conserva.

Análise: Este argumento trata-se de uma falácia de relevância, pois não podemos rejeitar a opinião de João pelo fato de ele ser um ex-prisioneiro.

Exemplo 2: Verifique se o argumento a seguir comete uma falácia de relevância.

João alega ter visto um crime.
João é um bêbado inveterado.
∴ O testemunho de João é sem valor.

Análise: Este é um caso limítrofe. A condição de João pode, sim, ser relevante para a integridade de seu testemunho, porém, ele pode ter presenciado o crime enquanto estava sóbrio.

Conforme pudemos observar nestes exemplos, os argumentos que cometem falácia de relevância buscam colocar em dúvida a validade das premissas atacando o carácter, a família, o sexo, a moral, a idade, a posição social, a aparência, o comportamento etc., da pessoa envolvida ou daqueles que concordam com ela. Há argumentos que tentam refutar a afirmação alegando dupla conduta, como:

Exemplo 3: João acredita que não deveríamos fumar.

João é fumante.
∴ Nós devemos fumar.

Análise: Apesar de o bom senso nos dizer que devemos ter coerência entre o que fazemos e o que dizemos, o fato de João fumar não tem relação com a verdade ou falsidade do que ele acredita.

Há, também, argumentos que tentam refutar uma afirmação dizendo que seu proponente deseja obter alguma coisa.

Exemplo 4: João apoia a construção de uma escola no bairro das Capitais.
Ele apoia porque possui uma construtora e ganhará muito dinheiro se a construção da escola for aprovada.
∴ Não devemos apoiar a construção da escola.

Análise: A construção da escola pode ser justificada independentemente dos motivos supostamente interesseiros de João. O lucro ou prejuízo dele não é importante, o que conta é a necessidade da demanda e o orçamento.

ATENÇÃO

Você sendo cidadão/cidadã! Prezado acadêmico, com certeza você percebeu que este tipo de falácia é amplamente utilizado dentre os políticos, principalmente próximo às eleições, como forma de influenciar o eleitor. De agora em diante você poderá ficar atento para verificar quando os argumentos que eles alegam são verdadeiros ou se estão cometendo uma falácia de relevância.

3 FALÁCIAS DE RACIOCÍNIO CIRCULAR

São assim denominadas porque assumem como premissa o que se quer provar. Apesar de o argumento ser sempre válido, ele é inútil para provar a conclusão. Nas falácias de raciocínio circular a conclusão geralmente está disfarçada ou reformulada com palavras diferentes da premissa, mas que possuem o mesmo significado.

Exemplo 1: Mulheres não devem trabalhar fora de casa.
As mulheres precisam cuidar dos filhos e do lar.
∴ Não se deve permitir que mulheres trabalhem fora de casa.

Esse é um argumento completamente circular; a premissa e a conclusão são a mesma coisa. Sabemos que o argumento acima foi utilizado durante muito tempo pelos homens e pela sociedade.

Exemplo 2: O Corinthians é o melhor time de futebol do campeonato, porque tem os melhores jogadores e o melhor treinador.
Vai ganhar o título porque merece conquistá-lo, já que é o melhor.
∴ O Corinthians merece ganhar o campeonato porque tem o melhor time do campeonato.

Novamente, o argumento vale-se de verdadeiro, utilizando na conclusão a mesma ideia defendida na premissa.

Exemplo 3: Este exemplo de falácia circular foi utilizado por um senador do estado do Rio Grande do Sul com o intuito de forçar uma autorização federal para renegociar a dívida do estado.

"O Rio Grande do Sul precisa renegociar sua dívida para ter recursos para saúde, educação, segurança e finanças.
A saúde, a educação, a segurança e as finanças estaduais estão comprometidas devido à falta de recursos.

A falta de recursos nas áreas de saúde, educação, segurança e finanças leva o RS a ter que renegociar sua dívida para obter mais recursos para as áreas da saúde, educação segurança e finanças."

OBS.: O nome do senador foi aqui ocultado a fim de não fazer apologia partidária.

4 FALÁCIAS SEMÂNTICAS

Esse tipo de falácia ocorre quando a linguagem utilizada na construção do argumento possui mais de um significado ou é excessivamente vaga a ponto de interferir na avaliação do argumento.

Por exemplo, quando nos referimos à linha, há inúmeros sentidos, linha de costura, linha telefônica, linha de metrô, linha de trem, ou pode estar se referindo a um símbolo matemático, ou ainda "dar linha" pode representar "dar corda", que pode ser entendido como incentivar que outra pessoa fale de um determinado assunto. Há também a expressão "sair da linha", que se refere ao comportamento inadequado de alguém.

A falácia semântica faz proveito da ambiguidade das palavras para validar o argumento. Vejamos os exemplos a seguir:

Exemplo 1: Os lugares inseguros devem ser evitados.
Os bancos próximos ao parque central devem ser evitados.
Devemos evitar lugares próximos ao parque central.

Veja que o termo "banco" pode significar assentos disponibilizados aos frequentadores do parque, como instituições financeiras. Neste contexto não há como saber a qual sentido o argumento se refere.

Exemplo 2: Chamamos de gigante a um homem de estatura elevada.
Eu conheço um homem baixo que se chama Gigante.
$\therefore$ Eu conheço um homem baixo de estatura elevada.

Muitas palavras e frases têm mais do que um significado literal. A ambiguidade produz a falácia semântica quando o significado de uma expressão muda durante o curso de um argumento, causando a aparência enganadora de validade.

5 FALÁCIAS INDUTIVAS

O raciocínio indutivo consiste em inferir, a partir das propriedades de uma amostra, às propriedades de uma população, como um todo. Assim, falácias indutivas fazem uma "generalização apressada".

Exemplo 1: Para ver a intenção de votos para a próxima eleição presidencial, pesquisou-se centenas de pessoas em São Paulo.
Como resultado, obtivemos que 76% votarão no candidato A.
∴ O candidato A será o novo presidente.

Esta é uma falácia indutiva, pois a preferência dos eleitores de São Paulo pode ser diferente dos eleitores de Santa Catarina, Distrito Federal, Amazonas etc.

Exemplo 2: No dia das mães do ano passado, queimei meu pé.
No dia das mães do ano anterior, bati meu carro.
∴ Todo dia das mães acontecem coisas ruins comigo.

A probabilidade indutiva deste argumento é baixa. Não é porque aconteceu em dois anos consecutivos, no dia das mães, que acontecerá sempre.

6 FALÁCIAS FORMAIS

As falácias formais ocorrem quando fazemos mau uso de uma regra de inferência válida ou quando cometemos erros na demonstração. Note, pelos exemplos a seguir, que já chamamos sua atenção para este tipo de falácia na seção de predicados, nos contraexemplos.

Exemplo 1: Se chover amanhã, o desfile será adiado.
Não choverá amanhã.
∴ O desfile não será adiado.

<u>Formalização</u>:
$C \rightarrow A$
$\sim C$
$\therefore \sim A$

O argumento é inválido, pois não podemos ter uma premissa que negue um antecedente condicional, pois ele induz à conclusão e esta, por sua vez, torna-se falsa.

Exemplo 2: Se Maria estudou para a prova, então ela tirou uma boa nota.
Ela teve uma boa nota.
∴ Maria estudou para a prova.

Formalização:
$E \rightarrow A$
E
$\therefore A$

É uma falácia que afirma o consequente. O fato de Maria ter tirado uma boa nota não significa, necessariamente, que ela estudou.

7 FALÁCIAS DE PREMISSAS FALSAS

Como a própria denominação já diz, tratam-se de argumentos que apresentam premissas falsas, logo não podemos aceitar como válido o argumento.

Exemplo 1: Ou João ama Maria ou a odeia.
João não ama Maria.
$\therefore$ João odeia Maria.

Note que a primeira premissa pode ser falsa, pois pode existir uma terceira opção: a opção de permanecer neutro.

Exemplo 2: Se João der um soco em José, ele quebra o nariz dele.
Se João quebra o nariz de José, ele comete um delito.
Não devemos cometer delitos.
$\therefore$ João não deve dar um soco em José.

Novamente, o erro não está na condução do argumento, mas em aceitar uma premissa falsa. Não é porque José levou um soco que o nariz dele quebrou.

Assim, finalizamos as seis classes de falácias. Sem dúvida nenhuma, além deste estudo contribuir para sua formação profissional, irá, também, auxiliá-lo em seu cotidiano, visto que permite analisar melhor os argumentos que lhe são ditos, sejam eles pelos filhos(as), esposo(a), pai, mãe, alunos, amigos, até religiosos, advogados e políticos.

Esta é uma abordagem superficial sobre as falácias que podemos cometer dentro da lógica. Em cada um desses grupos há subgrupos não explorados aqui. Desta forma, mesmo sendo um estudo informal, você pode ampliar estes conhecimentos consultando a bibliografia indicada.

RESUMO DO TÓPICO 2

Neste tópico estudamos que falácias são erros que ocorrem nos argumentos e que afetam a validade da prova. Argumentos falaciosos são enganosos, pois se confundem com bons argumentos, isso ocorre quando aceitamos premissas que não deveríamos ou fazemos uso inadequado dos fatos. As falácias estão classificadas em seis grupos:

- As falácias de relevância acontecem quando utilizamos, no argumento, premissas que não possuem relação com a conclusão, ou seja, não são relevantes para a conclusão.

- Falácias de raciocínio circular são assim denominadas porque assumem como premissa o que se quer provar. Apesar de o argumento ser sempre válido, ele é inútil para provar a conclusão. Nas falácias de raciocínio circular, a conclusão geralmente está disfarçada ou reformulada com palavras diferentes da premissa, mas que possuem o mesmo significado.

- Falácias semânticas, esse tipo de falácia ocorre quando a linguagem utilizada na construção do argumento possui mais de um significado, ou é excessivamente vaga a ponto de interferir na avaliação do argumento.

- O raciocínio indutivo consiste em inferir a partir das propriedades de uma amostra às propriedades de uma população como um todo. Assim, falácias indutivas fazem uma "generalização apressada".

- As falácias formais ocorrem quando fazemos mau uso de uma regra de inferência válida ou quando cometemos erros na demonstração.

- Falácias de premissas falsas, como a própria denominação já diz, tratam-se de argumentos que apresentam premissas falsas, logo não podemos aceitar como válido o argumento.

AUTOATIVIDADE

Falácias são erros que ocorrem nos argumentos e que afetam a validade da prova. Argumentos falaciosos são enganosos, pois se confundem com bons argumentos, isso ocorre quando aceitamos premissas que não deveríamos ou fazemos uso inadequado dos fatos. As falácias podem ser divididas em seis classes: falácias de relevância, falácias de raciocínio circular, falácias semânticas, falácias indutivas, falácias formais e falácias de premissas falsas.

Sabendo destes conceitos, reescreva os argumentos 1 e 2 a seguir, na forma padrão, e discuta as falácias cometidas (se houver).

1 Se a teoria da evolução de Darwin estava correta, então seus ancestrais eram macacos. Isso prova o quão absurda é a teoria de Darwin.

2 Xuxa recomenda o hidratante Monange. Xuxa é uma apresentadora muito popular. Portanto, eu devo experimentar esse hidratante.

Nos exercícios 3 a 6, comente cada argumento, apontando se ele é válido ou não.

3 Minha professora diz que eu devo me orgulhar de ser brasileiro.
∴ Eu devo me orgulhar de ser brasileiro.

4 Minha professora diz que eu devo me orgulhar de ser brasileiro.
Tudo que minha professora diz é verdadeiro.
∴ Eu devo me orgulhar de ser brasileiro.

5 Nos dez últimos lançamentos, essa moeda deu coroa.
∴ No próximo lançamento, é certo que dê cara.

6 Toda vez que como no restaurante X eu fico doente. Estou deixando de comer lá. Então, não ficarei mais doente.

TÓPICO 3

INDUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

No tópico anterior, estudamos a falácia de indução, que é aquela que se apressa em generalizar um caso particular. Assim, num raciocínio indutivo, a conclusão não é necessária dadas as premissas. O que nos interessa aqui é a probabilidade da conclusão, ou seja, a probabilidade indutiva do argumento.

Desta forma, iniciamos este terceiro tópico estudando a força do enunciado. Em seguida, silogismo estatístico, generalização estatística e, por fim, generalização indutiva.

2 FORÇA DO ENUNCIADO

No seu avançar pela disciplina, você percebeu que alguns enunciados informam mais que outros. Assim, podemos classificá-los em enunciado forte e enunciado fraco, sendo que o enunciado forte informa mais, independente da informação ser ou não verdadeira.

Um enunciado forte, para ser considerado verdadeiro, deve se ater às circunstâncias específicas, como: "Existem 62 mil habitantes em Indaial – Santa Catarina", ou ainda "Toda terça-feira é dia de episódio inédito de The Walking Dead na Fox".

Já um enunciado fraco é verdadeiro numa ampla variedade de circunstâncias e sua informação não é específica. "Existem pessoas más" e "Alguns gatos são dóceis" são exemplos de enunciados fracos.

AUTOATIVIDADE

Distinga os enunciados fortes dos fracos:

1 Existem exatamente três cidades catarinenses com população acima de 200 mil habitantes.

2 Algumas pessoas são boas.

3 Algo existe.

4 Todos os gatos são mamíferos.

5 A casa de João é a segunda à direita quando você vai Avenida Mal. Deodoro da Fonseca para a Rua Sete de Setembro.

Nem sempre é possível medir forças, no sentido de dizer qual dos enunciados fortes é o mais forte ou o mais fraco dos enunciados fracos, por exemplo, nos enunciados acima. Contudo, há duas regras que nos fornecem meios para determinar a força relativa entre os enunciados.

Regra 1: Se um enunciado A implica dedutivamente um enunciado B, mas B não implica dedutivamente A, então A é mais forte que B.

Regra 2: Se um enunciado A é logicamente equivalente ao enunciado B, ou seja, A implica B e B implica A, então A e B têm forças iguais.

Façamos algumas observações:

1) A negação de um enunciado fraco é forte e a negação de um enunciado forte é fraca. “Algumas pessoas são más” é um exemplo de enunciado fraco. Quando o negamos, “Nenhuma pessoa é má”, temos um enunciado que afirma muito, desta forma ele se torna forte.

2) Os enunciados mais fortes são os que afirmam que não podem ser verdadeiros, ou seja, os enunciados de autocontradição. Por exemplo: “Dimmy não é um cachorro”.

3) O item anterior se justifica, pois a força de um enunciado está inversamente relacionado com a sua probabilidade, isto é, um enunciado forte é o que menos tem possibilidade de ocorrer, já o enunciado fraco é aquele que tem mais probabilidade de acontecer/ser.

Vejamos os seguintes enunciados:

(a) Ou algumas leoas têm juba ou alguns leões têm juba.
(b) Existem leoas e leões, e todos os leões e leoas têm juba.
(c) Existem leoas e todas elas têm juba.
(d) Algumas leoas têm juba.
(e) Ou algumas leoas têm juba ou não é o caso que algumas leoas têm juba.
(f) Algumas leoas têm juba e não têm juba.

Agora, coloquemos os enunciados em ordem, do mais forte para o mais fraco. Note que o enunciado (f) é o mais forte, pois se trata de uma autocontradição e não possui probabilidade de ocorrer. Aplicando as regras 1 e 2, e levando em consideração as observações, a ordem fica: (f), (b), (c), (d), (a), (e).

A importância de se determinar a força de um enunciado está na sua relação com a probabilidade indutiva, isto é, a probabilidade de uma conclusão, dadas as premissas. Assim, a verdade das premissas fornece boas razões a favor da verdade da conclusão. Vejamos os exemplos:

Exemplo 1: Estudos observatórios com n gatos mostrou que todos eles gostam de leite.
∴ Se observarmos outro gato, ele também gostará de leite.

Note que à medida que o número n aumenta, mais forte é a premissa e, consequentemente, aumenta também a probabilidade indutiva do argumento.

A probabilidade indutiva será maior quanto mais fraca for a conclusão que inferimos.

Um exemplo disto é supor que a idade média do ingressante ao Ensino Superior no Brasil seja de 21 anos. E desejamos usar esta informação como premissa para inferir uma conclusão sobre um indivíduo X que ingressa à faculdade. Veja as conclusões que poderíamos inferir:

(a) X tem exatamente 21 anos.
(b) X tem entre 19 e 21 anos.
(c) X tem entre 17 e 25 anos.

Observando as conclusões, qual produz o argumento mais forte?

Sabendo que a probabilidade indutiva será maior quanto mais fraca for a conclusão que inferimos, e que a conclusão (c) é a mais fraca (visto ser a menos específica das três), podemos afirmar que a conclusão (c) irá gerar o argumento mais forte. Consequentemente, a conclusão (a), por ser a mais forte (mais específica), gera o argumento mais fraco.

3 SILOGISMO ESTATÍSTICO

O silogismo estatístico parte das estatísticas relativas a um conjunto de indivíduos para uma conclusão sobre algum elemento desse conjunto, conforme podemos observar no seguinte exemplo:

Exemplo 1: 95% das crianças brasileiras com idade entre 6 e 14 anos estão na escola.
João tem 10 anos.
∴ João está na escola.

Utilizando bases estatísticas, podemos concluir que é muito provável que João esteja na escola, dada a premissa que 95% das crianças que possuem a mesma idade que ele estão na escola. Este argumento pode ser assim formalizado:

n% de F é G
x é F
∴ *x é G*

A probabilidade indutiva é medida pelo grau de crença na conclusão, dadas as premissas. O valor da probabilidade indutiva deste argumento é o valor da porcentagem dividido por 100, ou seja, n/100. Observe que, no caso em que n = 100, o argumento torna-se dedutivo e sua probabilidade indutiva é 1. No exemplo 1, a probabilidade indutiva é 95/100, ou seja 0,95. Quanto mais próximo de 1, mais provável é a conclusão, consequentemente, quanto mais próximo de 0, menos provável ela é. Se n < 50, é natural que o argumento se formalize da seguinte maneira:

n% de F é G
x é F
∴ *x não é G*

Exemplo 2: A maior parte dos estudantes do ensino básico apresenta dificuldade na disciplina de matemática.
Maria cursa o sétimo ano.
Maria tem dificuldade na disciplina de matemática.

Neste exemplo não podemos atribuir uma probabilidade indutiva precisa, mas sabemos que a maior parte é superior a 50% dos estudantes do ensino básico. Assim, podemos afirmar que a probabilidade indutiva deste argumento é superior a 0,5.

4 GENERALIZAÇÃO ESTATÍSTICA

A generalização estatística é a situação contrária ao silogismo estatístico, como o próprio nome sugere, ela parte de estatísticas relativas a um subconjunto de um conjunto de indivíduos para uma conclusão sobre a composição de todo o conjunto. A amostra precisa ser retirada ao acaso, ou seja, qualquer elemento do universo tem a mesma chance de ser retirado como amostra.

Acadêmico, neste tipo de inferência é preciso cuidar para não se cometer falácias indutivas, também conhecidas como falácias de generalização apressada, tratadas na seção anterior.

Exemplo 1: Menos de 1% da produção de 10.000 pacotes de arroz de 5kg, selecionados ao acaso, com o intuito de examinar a produção da fábrica X no ano de 2013, deixou de satisfazer as especificações.
∴ Somente uma pequena quantidade de todos os pacotes de arroz de 5 kg produzidos pela fábrica X durante o ano de 2013 deixa de satisfazer as especificações.

Formalização:
n% de s, selecionados ao acaso, F é G.
∴ Quase n% de todo F é G.

Onde:
s é o tamanho da amostra.
F é uma propriedade que define a população sobre a qual estamos generalizando. Neste caso, a produção de pacotes de arroz de 5 kg produzidos pela empresa X em 2013.
G é a propriedade estudada. No exemplo 1, a propriedade de deixar de satisfazer as especificações.

O argumento utilizado no exemplo 1 é uma generalização estatística, cuja probabilidade indutiva é bem alta, visto que n > 99%.

Apesar de podermos determinar a força de um enunciado, o sucesso da generalização estatística depende fundamentalmente da técnica de amostragem fazer escolhas ao acaso. Conforme você já estudou na disciplina de Estatística e Probabilidade, também é fundamental atentar para a amostra mínima, margem de erro etc. Estes itens ficam como sugestão para aprofundar os estudos.

5 GENERALIZAÇÃO INDUTIVA

A generalização indutiva se diferencia da generalização estatística pelo fato de que na generalização indutiva as premissas não afirmam que a amostra é ao acaso. Isto ocorre quando a população em questão interfere em objetos ou eventos futuros. Como podemos observar no exemplo a seguir.

Exemplo 1: O time de futebol X venceu 10 dos 20 jogos que eles disputaram até agora nessa temporada.
∴ O time de futebol X terminará a temporada tendo ganho quase a metade de seus jogos.

Formalização:
n% de s observados até agora F é G.
∴ *Quase n% de todo F é G.*

Onde:
n é a porcentagem de s observados até agora. Neste caso, 10 dos 20 jogos, então n = 50%.
s é o tamanho da amostra. Neste exemplo, 20 jogos.
F é uma propriedade que define a população sobre a qual estamos generalizando. Neste caso, time de futebol X que joga nessa temporada.
G é a propriedade estudada. No exemplo 1, são (ou serão) os jogos ganhos pelo time X.

Geralmente, a generalização indutiva são argumentos mais fracos do que as generalizações estatísticas, pois não há uma maneira universalmente aceita para se calcular as probabilidades indutivas. Contudo, assim como na generalização estatística, a probabilidade indutiva aumenta quando s se torna maior. Assim, quando tivermos n = 100%, a generalização indutiva será formalizada por:

Todos os s observados até agora F é G.
∴ Todo F é G.

Esta é uma das mais importantes formas de generalização indutiva, pois é comumente considerada como justificativa para leis científicas. Alguns exemplos são descritos a seguir.

Exemplo 2: Todos os 1000 meteoritos observados até agora contêm ferro.
∴ Todo meteorito contém ferro.

Exemplo 3: Todas as 500 leoas observadas protegem suas crias.
∴ Todas as leoas protegem suas crias.

LEITURA COMPLEMENTAR

Trecho da crítica A lógica e os fundamentos da matemática, por Anthony Kenny (Universidade de Oxford).

A LÓGICA DE FREGE

O acontecimento mais importante na história da filosofia do século XIX foi a invenção da lógica matemática. Não se tratou apenas de fundar de novo a própria ciência da lógica; foi algo que teve igualmente consequências importantes para a filosofia da matemática, para a filosofia da linguagem e, em última análise, para a compreensão que os filósofos têm sobre a natureza da própria filosofia.

O principal fundador da lógica matemática foi Gottlob Frege. Nascido na costa báltica alemã em 1848, Frege (1848-1925) doutorou-se em Filosofia em Göttingen e ensinou na Universidade de Jena de 1874 até se reformar, em 1918. Exceto no que respeita à atividade intelectual, a vida de Frege foi rotineira e isolada; o seu trabalho foi pouco lido enquanto viveu, e mesmo depois da sua morte só exerceu influência por intermédio dos escritos de outros filósofos. Mas gradualmente foi-se reconhecendo que Frege foi o maior de todos os filósofos da matemática e que, como filósofo da lógica, foi comparável a Aristóteles. A sua invenção da lógica matemática foi uma das maiores contribuições para os desenvolvimentos, em diversas disciplinas, que estiveram na origem da invenção dos computadores. Dessa forma, Frege afetou as vidas de todos nós.

A produtiva carreira de Frege começou em 1879 com a publicação de um opúsculo intitulado *Begriffschrift*, ou *Escrita Conceptual*. A escrita conceitual que deu o título ao livro consistia num novo simbolismo concebido com o fim de exibir claramente as relações lógicas escondidas na linguagem comum. A notação de Frege, logicamente elegante mas tipograficamente incômoda, já não é usada em lógica simbólica; mas o cálculo por ele formulado constitui desde então a base da lógica moderna.

Em vez de fazer da silogística aristotélica a primeira parte da lógica, Frege atribuiu esse lugar a um cálculo inicialmente explorado pelos estoicos: o cálculo proposicional, ou seja, o ramo da lógica que trata das inferências que assentam na negação, conjunção, disjunção etc., quando aplicadas a frases declarativas no seu todo. O seu princípio fundamental — que remonta igualmente aos estoicos — consiste em considerar que os valores de verdade (isto é, verdadeiro ou falso) das frases declarativas que contêm conectivos como "e", "se", "ou", são determinados apenas pelos valores de verdade das frases ligadas pelos conectivos — da mesma forma que o valor de verdade da frase "João é gordo e Maria é magra" depende apenas dos valores de verdade de "João é gordo" e de "Maria é magra". As frases compostas, no sentido técnico dos lógicos, são tratadas como *funções de verdade* das frases simples que entram na sua composição. O *Begriffschrift* de Frege contém a primeira formulação sistemática do cálculo proposicional; este é apresentado sob uma forma axiomática, na qual todas as leis da lógica são derivadas, por meio de regras de inferência, a partir de um certo número de princípios primitivos.

A maior contribuição de Frege para a lógica foi a sua invenção da teoria da quantificação, isto é, um método para simbolizar e exibir rigorosamente as inferências, cuja validade depende de expressões como "todos" ou "alguns", "qualquer" ou "cada um", "nada" ou "nenhum". Este novo método permitiu-lhe, entre outras coisas, reformular a silogística tradicional.

Existe uma analogia entre a inferência

Todos os homens são mortais.
Sócrates é um homem.
Logo, Sócrates é mortal.

e a inferência

Se Sócrates é um homem, Sócrates é mortal.
Sócrates é um homem.
Logo, Sócrates é mortal.

A segunda é uma inferência válida no cálculo proposicional (se p, então q; dado que p, segue-se que q), mas nem sempre pode ser considerada uma tradução da primeira inferência, uma vez que a sua primeira premissa parece afirmar algo acerca de Sócrates em particular, ao passo que se "Todos os homens são mortais" for verdadeira, então:

Se x é um homem, x é mortal.

Será verdadeira independentemente do nome que substituir a variável x. De fato, esta frase continuará a ser verdadeira mesmo que x seja substituída por um nome que não designe homem algum, uma vez que nesse caso a antecedente é falsa e, de acordo com as regras verofuncionais para frases declarativas condicionais, a frase na sua totalidade será verdadeira. Assim, podemos exprimir a proposição tradicional:

Todos os homens são mortais.

Desta forma:

Para todo o x, se x é um homem, x é mortal.

Esta reformulação constitui a base da teoria da quantificação de Frege; para vermos como isso acontece, temos que explicar de que forma Frege concebeu cada um dos elementos que contribuem para formar uma frase complexa.

Frege introduziu a terminologia da álgebra na lógica. Pode dizer-se que uma expressão algébrica como $x/2 + 1$ representa uma *função* de x; o valor do número representado pela expressão na sua globalidade dependerá da substituição que se fizer para a variável x, ou, em terminologia técnica, do *argumento* que tomarmos para a função. Assim, o valor da função é 3 se o argumento for 4, e é 4 se o argumento for 6. Frege aplicou esta terminologia (argumento, função, valor) tanto a expressões da linguagem comum como a expressões em notação matemática. Substituiu as noções gramaticais de sujeito e de predicado pelas noções matemáticas de argumento e de função e, a par dos números, introduziu os valores de verdade como valores possíveis de expressões. Assim, "x é um homem" representa uma função que toma o valor *verdadeiro* para o argumento "Sócrates" e o valor *falso* para o argumento "Vênus". A expressão "para todo o x", que introduz a frase anterior, diz, em termos fregianos, que o que se lhe segue ("se x é um homem, x é mortal") é uma função verdadeira para qualquer argumento. A uma expressão deste tipo chama-se "quantificador".

Além de "para todo o x", o quantificador universal, existe também o quantificador particular "para algum x", que diz que o que se lhe segue é verdadeiro para pelo menos um argumento. Então, "alguns cisnes são pretos" pode representar-se num dialeto fregiano como "para algum x, x é um cisne e x é preto". Pode considerar-se que esta frase é equivalente a "existem coisas que são cisnes pretos"; e, na verdade, Frege usou o quantificador particular para representar a existência. Assim, "Deus existe" ou "há um Deus" é representada no seu sistema por "para algum x, x é Deus".

O uso da sua nova notação para a quantificação permitiu a Frege apresentar um cálculo que formalizou a teoria da inferência de uma forma mais rigorosa e mais geral do que a tradicional silogística aristotélica, a qual, até à época de Kant, fora considerada o suprassumo da lógica. Depois de Frege, a lógica formal podia, pela primeira vez, lidar com argumentos que envolviam frases com quantificação múltipla, frases que eram, por assim dizer, quantificadas em ambos os extremos, tais como "ninguém conhece toda a gente" e "qualquer criança em idade escolar pode dominar qualquer língua".

Retirado de *História Concisa da Filosofia Ocidental*, de Anthony Kenny. Trad. Desidério Murcho, Fernando Martinho, Maria José Figueiredo, Pedro Santos e Rui Cabral (Temas e Debates, 1999).

Sugestões de leitura

Os textos mais importantes de Frege estão coligidos em inglês no volume *The Frege Reader,* org. por M. Beaney (Blackwell, 1997). *Os Fundamentos da Aritmética* (INCM, 1992) foram traduzidos para português por A. Zilhão. As obras de M. Dummett, em especial *Frege: Philosophy of Language* (Duckworth, 2. ed., 1981), dominam a área, mas são difíceis para o principiante. Veja-se também A. Kenny, *Frege* (PENGUIN, 1995). A maior parte da obra de Russell está disponível em edições inglesas acessíveis. Os principiantes devem ler primeiro *Os Problemas* *da Filosofia* (Edições 70, 2008); *Introdução à Filosofia Matemática* (ZAHAR, 2007) é talvez a sua melhor obra. Há uma introdução curta a Russell de A. C. Grayling (1996).

FONTE: Disponível em: <http://criticanarede.com/logicismo.html> Acesso em: 16 mar. 2015.

RESUMO DO TÓPICO 3

Neste tópico, estudamos a força do enunciado, ou seja, a probabilidade da conclusão, ou seja, a probabilidade indutiva do argumento. Deste estudo, é pertinente destacarmos:

- **Força do enunciado**
  - Regra 1: Se um enunciado A implica dedutivamente um enunciado B, mas B não implica dedutivamente A, então A é mais forte que B.
  - Regra 2: Se um enunciado A é logicamente equivalente ao enunciado B, ou seja, A implica B e B implica A, então A e B têm forças iguais.

- **Silogismo estatístico**
  Parte das estatísticas relativas a um conjunto de indivíduos para uma conclusão sobre algum elemento desse conjunto. Formalização:

n% de F é G
x é F
$\therefore$ *x é G*

  - O valor da probabilidade indutiva deste argumento é o valor da porcentagem dividido por 100, ou seja, n/100.
  - Se $n < 50$ é natural que o argumento se formaliza da seguinte maneira:

n% de F é G
x é F
$\therefore$ *x não é G*

- **Generalização estatística**
  É a situação contrária ao silogismo estatístico, como o próprio nome sugere, ela parte de estatísticas relativas a um subconjunto de um conjunto de indivíduos para uma conclusão sobre a composição de todo o conjunto. A amostra precisa ser retirada ao acaso, ou seja, qualquer elemento do universo tem a mesma chance de ser retirado como amostra. Formalização:

n% de s, selecionados ao acaso, F é G.
$\therefore$ *Quase n% de todo F é G.*

- **Generalização indutiva**
  A generalização indutiva se diferencia da generalização estatística pelo fato de que na generalização indutiva as premissas não afirmam que a amostra é ao acaso. Isto ocorre quando a população em questão interfere em objetos ou eventos futuros. Formalização:

n% de s observados até agora F é G.
∴ Quase n% de todo F é G.

Quando tivermos n = 100%, a generalização indutiva será formalizada por:

Todos os s observados até agora F é G.
∴ Todo F é G.

AUTOATIVIDADE

Acadêmico, vimos que alguns enunciados informam mais que outros, o que nos permite classificá-los em enunciado forte e enunciado fraco, sendo que o enunciado forte informa mais, independente da informação ser ou não verdadeira. A importância de se determinar a força de um enunciado está na sua relação com a probabilidade indutiva, isto é, a probabilidade de uma conclusão, dadas as premissas. Assim, a verdade das premissas fornece boas razões a favor da verdade da conclusão, e a probabilidade indutiva será maior quanto mais fraca for a conclusão que inferimos. Desta forma, coloque os argumentos em ordem decrescente de probabilidade indutiva:

(a) A decolagem de 98% dos voos domésticos da empresa X não atrasam.
Um avião da empresa X decolou às 14h de 16 de março de 2014.
∴ Este voo não atrasou.

(b) Um voo da empresa X decolará amanhã.
∴ Este voo não atrasará.

(c) A decolagem de 98% dos voos domésticos da empresa X não atrasam.
Um voo da empresa X decolará amanhã.
∴ Este voo não atrasará.

(d) Nenhum voo da empresa X atrasou.
Um avião da empresa X decolou às 14h de 16 de março de 2014.
∴ Este voo atrasou.

MENSAGEM DA AUTORA

Acadêmico, chegamos ao término da terceira unidade de estudos da disciplina de Lógica Matemática, porém os assuntos aqui tratados não estão esgotados, visto que a aprendizagem é contínua e a disciplina precisa ter um início e um fim. Desta forma, aprenda mais! Busque as bibliografias recomendadas a seguir em seu polo de apoio presencial, aproveite as facilidades da internet para aprofundar o que você aprendeu.

Como sugestão, listamos algumas obras para que você conheça ainda mais sobre a matemática desta disciplina. Como você já sabe, a prática da leitura contribui em sua formação pessoal e profissional. Assim, para começar, escolha um desses livros e coloque em sua cabeceira para a leitura diária!

ALENCAR FILHO, Edgar de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

MAIO, Waldemar de. **O raciocínio lógico-matemático**: sua estrutura neurofisiológica e aplicações à educação matemática. São Paulo: Arte & Ciência, 2004.

CASTRUCCI, Benedito. **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 1977.

REFERÊNCIAS

ALENCAR FILHO, Edgar de. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2002.

ALMEIDA, Marcos Antônio de. **Raciocínio lógico**. Florianópolis: Conceito Editorial, 2009.

AZEVEDO, V. D. **Introdução à lógica**. Ijuí: INIJUI, 2004.

BISPO, Carlos Alberto Ferreira; CASTANHEIRA, Luiz Batista; SOUZA FILHO, Oswaldo Melo. **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

CASTRUCCI, Benedito. **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 1977.

FAVARO, Sílvio; FILHO, OsmirKmeteuk. **Noções de lógica e matemática básica**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2005.

FILHO, Edgard de Alencar. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Nobel, 2011.

HEGENBERG, Leônidas. **Lógica:** o cálculo de predicados. 3. ed. São Paulo: EPU, 2010.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Microdicionário de matemática**. São Paulo: Scipione, 2007.

MAIO, Waldemar de. **O raciocínio lógico-matemático**: sua estrutura neurofisiológica e aplicações à educação matemática. São Paulo: Arte & Ciência, 2004.

PINTO, Paulo Roberto Margutti. **Introdução à lógica simbólica**. Belo Horizonte: UFMG, 2006.

WATANABE, Oswaldo K. **Iniciação à lógica matemática**. São Paulo: Alexa Cultural, 2010.